INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 385

COMPLÉTUDE DES MODES T.E ET T.M POUR UN GUIDE D'ONDES OPTIQUES PLANAIRE

Jean-Claude GUILLOT

Mars 1985

COMPLETUDE DES MODES T.E ET T.M

POUR UN GUIDE D'ONDES OPTIQUES PLANAIRE

Jean-Claude GUILLOT(*) (**)

(*) Département de Mathématiques Centre Scientifique et Polytechnique Université Paris-Nord Villetaneuse (France).

(**) Conseiller Scientifique INRIA

RESUME

Dans ce rapport, on donne une démonstration de la complétude des modes T.E et T.M pour un guide d'ondes optiques planaire.

ABSTRACT

In this report, a proof of the completude of T.E and T.M modes is given for a dielectric slab waveguide.

MOTS CLES

Guides d'ondes optiques - Théorie spectrale - développements en fonctions propres généralisées.

KEY WORDS

Optical waveguides - spectral theory - generalized eigenfunctions expansions.

I. INTRODUCTION

Dans cet article nous considérons la propagation des ondes électromagnétiques dans une couche diélectrique d'épaisseur finie et constante reposant sur un support diélectrique d'indice différent. L'indice de la couche est supposé être strictement plus grand que celui du support et de l'air environnant. C'est l'un des exemples les plus simples de fibre optique.

Il est bien connu qu'un tel système peut propager des ondes guidées par la couche diélectrique.

Pour décrire la propagation des ondes électromagnétiques dans une fibre optique, physiciens et ingénieurs utilisent les différents modes T.E. (transverse électriques) et T.M. (transverse magnétiques) (cf. [1], [2] , [3]). Du point de vue mathématique, les modes T.E. et T.M. sont des fonctions propres généralisées de l'opérateur de Maxwell qui permettent de décrire les solutions d'énergie finie des équations de Maxwell. Il est bien connu que 0 est valeur propre de l'opérateur de Maxwell et nous démontrons que les modes T.E. et T.M. forment un système complet de fonctions propres généralisées pour la restriction de l'opérateur de Maxwell au complémentaire du sous espace propre correspondant à la valeur propre 0.

Pour ce faire, on utilise la méthode développée successivement dans [4], [5] et [6]. Elle consiste, en faisant une transformation de Fourier partielle, à écrire l'opérateur comme une intégrale directe d'une famille d'opérateurs différentiels ordinaires du premier ordre qu'on appelle opérateurs réduits. Il suffit alors de faire une étude spectrale complète des opérateurs réduits et on utilise de manière essentielle la symétrie cylindrique du problème pour en simplifier l'étude.

On peut aussi décrire toutes les solutions non stationnaires d'énergie finie des équations de Maxwell et on pourrait, à partir de la représentation obtenue, en étudier le comportement asymptotique lorsque t devient très grand.

Cet article est organisé comme suit. Le second chapitre est consacré aux équations de Maxwell et à l'opérateur de Maxwell. Dans le troisième chapitre, on étudie complètement le spectre ponctuel de l'opérateur réduit, dans le quatrième sa résolvante et dans le cinquième on en obtient un développement en fonctions propres généralisées. Dans le sixième chapitre, nous obtenons un développement en fonctions propres généralisées pour l'opérateur de Maxwell et dans la conclusion, nous donnons quelques indications de la manière dont ces résultats peuvent être utilisés pour étudier d'autres problèmes comme ceux du scattering des ondes électromagnétiques par un défaut d'interface ou par une inhomogénéité locale de l'indice et comme l'étude d'autres types de fibre optique.

Remerciements

Je tiens à remercier C.H. Wilcox avec lequel j'ai débuté l'étude de ce problème lors d'un séjour à l'Université de L'Utah à Salt Lake City pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui.

2. LES EQUATIONS DE MAXWELL ET L'OPERATEUR DE MAXWELL

Définition 2.1

Soit $h > 0$. *On considère les deux fonctions numériques* $\varepsilon(y)$ *et* $\mu(y)$ *définies comme suit :*

$$(2.1)\quad \begin{cases} \varepsilon(y) = \varepsilon_0 \ , \ \mu(y) = \mu_0 & \textit{pour tout} \quad y < 0 \\ \varepsilon(y) = \varepsilon_1 \ , \ \mu(y) = \mu_1 & \textit{pour} \quad 0 < y < h \ , \\ \varepsilon(y) = \varepsilon_2 \ , \ \mu(y) = \mu_2 & \textit{pour} \quad h < y \ , \end{cases}$$

où $\varepsilon_j > 0$ *et* $\mu_j > 0$ *pour tout* $j = 0,1,2$.

Soit maintenant $(x_1,x_2,y) \in \mathbb{R}^3$. Aux deux fonctions $\varepsilon(.)$ et $\mu(.)$ on associe les *équations* de Maxwell :

$$(2.2)\quad \begin{cases} \nabla \times \vec{H} - \varepsilon(y) \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \mu(y) \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$(2.2\text{bis})\quad \begin{cases} \operatorname{div} \varepsilon(y) \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \mu(y) \vec{H} = 0 \end{cases}$$

où $\quad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y})$.

$$\vec{E}(t,x_1,x_2,y) = \begin{pmatrix} E_1(t,x_1,x_2,y) \\ E_2(t,x_1,x_2,y) \\ E_3(t,x_1,x_2,y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{H}(t,x_1,x_2,y) = \begin{pmatrix} H_1(t,x_1,x_2,y) \\ H_2(t,x_1,x_2,y) \\ H_3(t,x_1,x_2,y) \end{pmatrix}$$

appartiennent a priori à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^3)$.

En explicitant (2.2), on obtient le système symétrique du premier ordre suivant

$$(2.3)\qquad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \partial_t \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -D_3 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & -D_1 \\ 0 & 0 & 0 & -D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & D_3 & -D_2 & 0 & 0 & 0 \\ -D_3 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$$

où $\quad D_1 = \partial/\partial x_1 \quad , \quad D_2 = \partial/\partial x_2 \quad , \quad D_3 = \partial/\partial y.$

On s'intéresse plus particulièrement aux solutions de (2.2) et de (2.2bis) ou de (2.3) et de (2.2bis), d'énergie finie, i.e., aux solutions

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(t,.,.,.) \\ \\ \vec{H}(t,.,.,.) \end{pmatrix} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3;\ \mathbb{C}^6)$$

et telles que

$$(2.4)\qquad \varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon(y)|\vec{E}(t,x_1,x_2,y)|^2 + \mu(y)|\vec{H}(t,x_1,x_2,y)|^2)dx_1dx_2dy < \infty\ .$$

Notons que dans ce cas, la quantité ε, appelée énergie, est indépendante de t. De plus, parmi toutes les solutions de (2.2) et de (2.2bis) d'énergie finie, on s'intéressera à celles décrivant une propagation de l'énergie, i.e., celles par lesquelles on a pour tout compact K de $\mathbb{R}^3$,

$$(2.5)\qquad \lim_{t\to\pm\infty} \varepsilon(t,K) = 0$$

où

$$(2.6)\qquad \varepsilon(t,K) = \int_K (\varepsilon(y)|\vec{E}(t,x_1,x_2,y)|^2 + \mu(y)|\vec{H}(t,x_1,x_2,y)|^2)dx_1dx_2dy\ .$$

Soit m *l'opérateur de Maxwell formel* suivant :

$$(2.7) \qquad m = i \begin{pmatrix} \varepsilon(y)^{-1} & 0 \\ 0 & \mu(y)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \nabla x. \\ -\nabla x. & 0 \end{pmatrix}$$

considéré comme opérateur de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$, ou encore

$$(2.8) \qquad m = i \begin{Bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -D_3 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & -D_1 \\ 0 & 0 & 0 & -D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & D_3 & -D_2 & 0 & 0 & 0 \\ -D_3 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Il s'agit alors de montrer que toutes les solutions d'énergie finie et décrivant une propagation d'énergie sont engendrées en un sens mathématique précis à l'aide de fonctions propres de m habituellement calculées par les physiciens et appelées par eux "modes" et la démonstration de toutes les conjectures énoncées par les physiciens passe par l'analyse spectrale complète d'un opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^6)$ associé à l'opérateur de Maxwell formel m.

Posons

$$(2.9) \qquad c_j^2\, \varepsilon_j\, \mu_j = 1 \qquad j=0,1,2$$

avec $c_j > 0$ pour tout j.

On distingue essentiellement par la suite trois cas suivant les valeurs relatives des constantes c_j.

Type 1

(2.10) $\quad 0 < c_1 < c_0 \leq c_2$

C'est le cas des guides d'onde optiques (cf. [1], [2], [3]). C'est de loin le cas le plus important sur le plan physique.

Type 2

(2.11) $\quad 0 < c_0 \leq c_1 \leq c_2$

C'est le cas des couches de transition.

Type 3

(2.12) $\quad 0 < c_0 \leq c_2 \leq c_1$.

Soit maintenant

(2.13) $$D(M_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{E}(x_1,x_2,y) \\ \vec{H}(x_1,x_2,y) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6) \; ; \begin{pmatrix} \nabla x \vec{H} \\ -\nabla x \vec{E} \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6) \right\}$$

(2.14) $$M_0 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \nabla x \vec{H} \\ -\nabla x \vec{E} \end{pmatrix} .$$

Il est bien connu que M_0 est un opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$. Une description détaillée de $D(M_0)$ a été donnée dans [4].

Soient maintenant $\varepsilon(.)$ et $\mu(.)$ les deux fonctions numériques données dans la définition 2.1. Soient

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{H}' \end{pmatrix}$$

appartenant à $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$; on définit la forme sesquilinéaire suivante :

$$(2.15)\qquad \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varepsilon(.)\vec{E}'\\ \mu(.)\vec{H}'\end{pmatrix}\right)=\int_{\mathbb{R}^3}\left(\varepsilon(y)\left(\sum_{j=1}^{3}E_j\bar{E}'_j\right)+\mu(y)\left(\sum_{j=1}^{3}H_j\bar{H}'_j\right)\right)dx_1dx_2dy$$

Par suite de la définition (2.1), on vérifie immédiatement que

$$\left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varepsilon(.)\vec{E}'\\ \mu(.)\vec{H}'\end{pmatrix}\right)<\infty .$$

De plus, on vérifie immédiatement aussi que la forme (2.15) est un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ pour lequel cet ensemble est un espace métrique complet.

Définition 2.2

On note K *l'ensemble* $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ *muni du produit scalaire (2.15).* K *est un espace de Hilbert avec*

$$(2.16)\qquad \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}\right)_K=\left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varepsilon\vec{E}'\\ \mu\vec{H}'\end{pmatrix}\right)_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)}$$

A noter qu'en vertu de la définition (2.1), la norme habituelle de $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$:

$$(2.17)\qquad \left\|\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}\right\|=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left\{\sum_{j=1}^{3}\left(|E_j|^2+|H_j|^2\right)\right\}dx_1dx_2dy\right)^{1/2}$$

et la norme héritée de (2.15)

$$(2.18)\qquad \left\|\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}\right\|_K=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left\{\varepsilon(y)\left(\sum_{j=1}^{3}|E_j|^2\right)+\mu(y)\left(\sum_{j=1}^{3}|H_j|^2\right)\right\}dx_1dx_2dy\right)^{1/2}$$

sont équivalentes. En effet si $M=\sup(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\mu_0,\mu_1,\mu_2)$ et si $m=\inf(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\mu_0,\mu_1,\mu_2)$,

$$(2.19)\qquad m\left\|\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}\right\|^2\le\left\|\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}\right\|_K^2\le M\left\|\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}\right\|^2 .$$

Définition 2.3

On pose

(2.20) $\quad D(M) = D(M_0) \subset K$

et

(2.21) $\quad M\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon(.)^{-1} & 0\\ 0 & \mu(.)^{-1}\end{pmatrix} M_0\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}$

pour tout $\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix} \in D(M)$.

On appelle M l'*opérateur de Maxwell.*

On a alors la proposition suivante

Proposition 2.1

L'opérateur M *est un opérateur autoadjoint dans* K.

Démonstration

Remarquons que l'on a tout d'abord

(2.22) $\quad \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}\right)_K = \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varepsilon\,\vec{E}'\\ \mu\,\vec{H}'\end{pmatrix}\right)_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)} = \left(\begin{pmatrix}\varepsilon\,\vec{E}\\ \mu\,\vec{H}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}\right)_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)}.$

Montrons d'abord que M est un opérateur symétrique. Tout d'abord, D(M) est dense dans K. Comme conséquence du fait que $D(M_0)$ l'est dans $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ et de (2.19). De plus,

(2.23) $\quad \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, M\begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}\right)_K = \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, M_0\begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}\right)_{L^2} = \left(M_0\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}\right)_{L^2}$

$$= \left(M\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}\right)_K$$

pour $\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}$ appartenant à $D(M^*)$ et où nous avons utilisé le fait que M_0 est autoadjoint et (2.22). Par suite $M \subset M^*$. Montrons que $M^* \subset M$. A tout $\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix} \in D(M^*)$, il correspond $\begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix} = M^*\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}$ tel que l'on ait

$$(2.24)\qquad \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, M\begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix}\right)_K = \left(\begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix}\right)_K$$

pour tout

$$\begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix} \in D(M) = D(M_0) .$$

De plus

$$(2.25)\qquad \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, M\begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix}\right)_K = \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, M_0\begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix}\right)_{L^2}$$

et

$$(2.26)\qquad \left(\begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix}\right)_K = \left(\begin{pmatrix}\varepsilon\,\vec{E}'\\ \mu\,\vec{H}'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix}\right)_{L^2} .$$

Donc

$$(2.27)\qquad \left(\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}, M_0\begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix}\right)_{L^2} = \left(\begin{pmatrix}\varepsilon\,\vec{E}'\\ \mu\,\vec{H}'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{E}''\\ \vec{H}''\end{pmatrix}\right)_{L^2} .$$

Par suite, on a

$$(2.28)\qquad \begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix} \in D(M_0^*) = D(M_0) = D(M),$$

et

$$(2.29)\qquad \begin{pmatrix}\vec{E}'\\ \vec{H}'\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}.$$

Par suite, on a bien $M^* \subset M$, ce qui montre que $M^* = M$. □

Soit $\Pi(.)$ *la mesure spectrale de* M. Comme on le verra par la suite $\{0\}$ est valeur propre de M. Ainsi, si on pose

$$K_1 = \pi(\{0\})K \quad \text{et} \quad K_2 = (\mathbb{R}-\{0\})K ,$$

on a

$$K = K_1 \oplus K_2$$

et chacun des deux sous espaces K_1 et K_2 réduit l'opérateur M ainsi que l'opérateur d'évolution e^{itM}.

D'autre part K_1 est le sous espace de M pour la valeur propre $\{0\}$. Ainsi $\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}$ appartient à K_1 si et seulement si $\nabla_1\vec{E} = \nabla_1\vec{H} = 0$ et tout élément $\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}$ orthogonal à K_1, donc tout élément de K_2 vérifie $\operatorname{div} \varepsilon(y)\vec{E} = \operatorname{div} \mu(y)\vec{H} = 0$ (voir par exemple [4]).

Ainsi toute solution d'énergie finie de (2.2) dont les conditions initiales vérifient (2.2bis) correspond à une solution de (2.2) dont les conditions initiales appartiennent à K_2. La solution appartient donc à K_2 pour tout t et vérifiera les conditions (2.2bis) pour tout t.

Ainsi
l'étude des solutions d'énergie finie des équations de Maxwell est équivalente à l'étude spectrale de la restriction de M *au sous espace* $\pi(\mathbb{R}-\{0\})$.

Cet article décrit un système complet de fonctions propres généralisées pour la restriction de M au sous espace $\pi(\mathbb{R}-\{0\})$.

En fait, sur le plan heuristique et à travers les calculs formels effectués par les physiciens, l'analyse spectrale de $M\pi(\mathbb{R}-\{0\})$ utilise comme fonctions propres généralisées les "modes T.E." (i.e. "transverse electric modes") et les "modes T.M." (i.e. "transverse magnetic modes"). Afin de récupérer finalement les mêmes fonctions propres que celles utilisées pratiquement, il importe de présenter l'opérateur de Maxwell sous une forme différente de celle donnée dans (2.3). En fait on peut écrire le système (2.3) sous la forme équivalente suivante :

$$(2.30)\qquad \begin{Bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{Bmatrix} \partial_t \begin{Bmatrix} E_2 \\ H_1 \\ H_3 \\ H_2 \\ E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & D_3 & -D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_2 \\ -D_1 & 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D_3 & D_1 \\ 0 & 0 & D_2 & -D_3 & 0 & 0 \\ 0 & -D_2 & 0 & D_1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_2 \\ H_1 \\ H_3 \\ H_2 \\ E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

Cette approche justifie les définitions suivantes. Soit P l'application de $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ dans lui-même

$$(2.31)\qquad P \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_2 \\ H_1 \\ H_3 \\ H_2 \\ E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

alors P est une application bijective de $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ dans lui-même et P est un opérateur unitaire de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ dans lui-même.

L'opérateur suivant

$$(2.32)\qquad D(A_0) = P\, D(M_0)$$

$$(2.33)\qquad A_0 = P\, M_0\, P^{-1}$$

est un opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ unitairement équivalent à M_0.

Et si

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \in D(A_0)$$

on a

$$(2.34) \qquad A_0 u = i \begin{Bmatrix} 0 & D_3 & -D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_2 \\ -D_1 & 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D_3 & D_1 \\ 0 & 0 & D_2 & -D_3 & 0 & 0 \\ 0 & -D_2 & 0 & D_1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} .$$

Soit maintenant $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_6 \end{pmatrix}$ appartenant à $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$, on définit la forme sesquilinéaire suivante :

$$(2.35) \qquad \left(\left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{Bmatrix} , \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_6 \end{Bmatrix} \right)\right) = \left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} , \begin{Bmatrix} \varepsilon(.)u_1 \\ \mu(.)u_2 \\ \mu(.)u_3 \\ \mu(.)u_4 \\ \varepsilon(.)u_5 \\ \varepsilon(.)u_6 \end{Bmatrix} \right)_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)}$$

où $\varepsilon(.)$ et $\mu(.)$ sont donnés par la définition 2.1. (2.35) est un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ pour lequel cet ensemble est un espace de Hilbert.

Définition 2.4

On note H *l'ensemble* $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^6)$ *muni du produit scalaire (2.35).* H *est un espace de Hilbert.*

On pose

$$(2.36)\quad \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} \right\|_H = \left(\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} \right) \right)^{1/2} .$$

On a alors comme pour (2.19)

$$(2.37)\quad m \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} \right\|^2 \leq \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} \right\|_H^2 \leq M \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} \right\|^2 .$$

De plus, π est un opérateur unitaire de K dans H.

Définition 2.5

On pose

$$(2.38)\quad D(A) = D(A_0) \subset H$$

et

$$(2.39)\quad Au = \begin{bmatrix} \varepsilon(.)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu(.)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(.)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(.)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon(.)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon(.)^{-1} \end{bmatrix} A_0 u$$

pour tout $u \in D(A)$.

On a alors comme pour la proposition 2.1

Proposition 2.2

L'opérateur A *est un opérateur autoadjoint dans* $\mathcal{H}$ *et*

(2.40) $A = P\,M\,P^{-1}$.

En vertu de la proposition 2.2 et en particulier de (2.40), il suffit donc pour étudier les propriétés spectrales de M d'étudier celle de A et c'est ce que nous allons faire dorénavant.

Soit

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1,x_2,y) \\ u_2(x_1,x_2,y) \\ \vdots \\ u_6(x_1,x_2,y) \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \ .$$

Le théorème de Fubini implique que

$$\begin{bmatrix} u_1(.,.,y) \\ u_2(.,.,y) \\ \vdots \\ u_6(.,.,y) \end{bmatrix} \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^6)$$

pour presque tout $y \in \mathbb{R}$. Ainsi si $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ est la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors le théorème de Plancherel implique que, pour $j = 1,2,\dots,6$:

(2.41) $$\hat{u}_j(p,y) = (\mathcal{F}u)(p,y) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|x|\le M} e^{-ipx}\, u_j(x_1,x_2,y)\,dx_1dx_2$$

où

$$p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad x.p = x_1p_1 + x_2p_2$$

existe dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ et

$$(2.42) \qquad \sum_{j=1}^{6} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{u}_j(p,y)|^2 dp_1 dp_2 = \sum_{j=1}^{6} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x,y)|^2 dx_1 dx_2$$

pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

On note aussi

$$(2.43) \qquad \hat{u} = \mathcal{F}\, u = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_6 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix}$$

où maintenant $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^6)$ qu'on note de la même manière que la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ sans risque de confusion.

Par suite, une autre application du théorème de Fubini donne :

Proposition 2.3

$u \in \mathcal{H}$ si et seulement si $\hat{u} \in \mathcal{H}$. De plus

$$(2.44) \qquad ||u||_{\mathcal{H}} = ||\hat{u}||_{\mathcal{H}} \quad \textit{pour tout} \quad u \in \mathcal{H}.$$

$\mathcal{F}$ définit aussi un opérateur unitaire de $\mathcal{H}$ dans lui-même.

Nous introduisons maintenant l'opérateur transformé de Fourier de A.

Définition 2.6

On pose

$$(2.45) \qquad D(\hat{A}) = \mathcal{F}\, D(A)$$

et

$$(2.46) \qquad \hat{A} = \mathcal{F}\, A\, \mathcal{F}^{-1}.$$

$\hat{A}$ est évidemment un opérateur autoadjoint dans H et on a pour tout $u \in D(\hat{A})$,

$$(\hat{A}\, u)(p_1,p_2,y) =$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon(y)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon(y)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\frac{\partial}{\partial y} & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ i\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{\partial}{\partial y} & -p_1 \\ 0 & 0 & -p_2 & -i\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & -p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

La forme de $\hat{A}$ suggère les définitions suivantes. Soient

$$\begin{bmatrix} u_1(.) \\ u_2(.) \\ \vdots \\ u_6(.) \end{bmatrix} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6) \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} u_1'(.) \\ u_2'(.) \\ \vdots \\ u_6'(.) \end{bmatrix} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6) .$$

On définit alors la forme sesquilinéaire suivante :

$$\left(\left(\begin{Bmatrix} u_1(.) \\ u_2(.) \\ \vdots \\ u_6(.) \end{Bmatrix} , \begin{Bmatrix} u_1'(.) \\ u_2'(.) \\ \vdots \\ u_6'(.) \end{Bmatrix} \right)\right)_{H(\mathbb{R})} = \left(\begin{Bmatrix} u_1(.) \\ u_2(.) \\ \vdots \\ u_6(.) \end{Bmatrix} , \begin{Bmatrix} \varepsilon(.)u_1'(.) \\ \mu(.)u_2'(.) \\ \mu(.)u_3'(.) \\ \mu(.)u_4'(.) \\ \varepsilon(.)u_5'(.) \\ \varepsilon(.)u_6'(.) \end{Bmatrix} \right)_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6)} = \tag{2.48}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \{\varepsilon(y)(u_1(y)\overline{u_1'(y)} + u_5(y)\overline{u_5'(y)} + u_6(y)\overline{u_6'(y)}) +$$

$$+ \mu(y)(u_2(y)\overline{u_2'(y)} + u_3(y)\overline{u_3'(y)} + u_4(y)\overline{u_4'(y)})\}\, dy.$$

(2.48) définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6)$.

Définition 2.7

On note $H(R)$ *l'ensemble* $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6)$ *muni du produit scalaire (2.48).* $H(\mathbb{R})$ *est un espace de Hilbert.*

Soit maintenant pour tout $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$D(A_{0,p}) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6) \right. ;$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & i\frac{d}{dy} & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ i\frac{d}{dy} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{d}{dy} & -p_1 \\ 0 & 0 & -p_2 & -i\frac{d}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & -p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ \vdots \\ \\ u_6(y) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6) \right\} \tag{2.49}$$

$$A_{0,p} \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ \\ \\ u_6(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{d}{dy} & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ i\frac{d}{dy} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{d}{dy} & -p_1 \\ 0 & 0 & -p_2 & -i\frac{d}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & -p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ u_3(y) \\ \vdots \\ u_6(y) \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

Alors, on a :

Proposition 2.4

Pour tout $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, *fixé, l'opérateur* $A_{0,p}$ *est un opérateur autoadjoint dans* $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6)$.

Démonstration

Considérons la fonction matricielle $a_{0,p}(p_3)$ suivante

$$(2.51)\qquad a_{0,p} : p_3 \to \begin{pmatrix} 0 & p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & -p_1 \\ 0 & 0 & -p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & -p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad p_3 \in \mathbb{R} .$$

$a_{0,p}(p_3)$ est une matrice hermitienne.

Soit $\hat{A}_{0,p}$ l'opérateur dans $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6)$ suivant :

$$(2.52)\qquad D(\hat{A}_{0,p}) = \{u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6) \quad ; \quad a_{0,p}(.)u(.) \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6)\}$$

$$(2.53)\qquad (\hat{A}_{0,p}u)(p_3) = a_{0,p}(p_3)u(p_3) .$$

Il est bien connu que $\hat{A}_{0,p}$ est un opérateur autoadjoint et si F note la transformation de Fourier de $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^6)$ dans lui-même :

$$(2.54)\qquad (F\, u)(p_3) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{|y|\leq M} e^{-ip_3 y}\, u(y)dy .$$

On a :

$$(2.55)\qquad D(A_{0,p}) = F^{-1}\, D(\hat{A}_{0,p})$$

$$(2.56)\qquad A_{0,p} = F^{-1}\, \hat{A}_{0,p}\, F ,$$

ce qui montre en particulier que l'opérateur $A_{0,p}$ est autoadjoint. $\square$

Définition 2.8

On pose pour tout $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$;

$$D(A_p) = D(A_{0,p}) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R})$$

et

$$(2.57)\qquad A_p \begin{bmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ \vdots \\ \\ u_6(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon(y)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon(y)^{-1} \end{bmatrix} A_{0,p} \begin{bmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ \vdots \\ \\ u_6(y) \end{bmatrix}$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.5

L'opérateur A_p *est pour tout* $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ *un opérateur autoadjoint dans* $\mathcal{H}(\mathbb{R})$.

En utilisant la notion d'intégrale directe (cf. [5]), on peut écrire

$$(2.58)\qquad \mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} \mathcal{H}(p_1, p_2)\, dp_1 dp_2 ,$$

où $\mathcal{H}(p_1, p_2) = \mathcal{H}(\mathbb{R})$ pour presque tous p_1 et p_2. Il sera alors montré dans cet article que l'opérateur autoadjoint $\hat{A}$ n'est rien d'autre que le champ mesurable des opérateurs A_p associé à (2.58), soit,

$$(2.59)\qquad \hat{A} = \int_{\mathbb{R}^2}^{\oplus} A_p\, dp_1 dp_2 .$$

Le problème est alors comme dans ([5], [6], [7]) d'étudier les propriétés de $\hat{A}$ à partir de celles de chacun des opérateurs A_p. Aussi allons-nous préciser la structure des opérateurs autoadjoints A_p afin d'en faciliter l'étude.

Définition 2.9

Pour tout $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, *on pose*

$$(2.60) \qquad |p| = (|p_1|^2 + |p_2|^2)^{1/2}$$

et

$$(2.61) \qquad A_{|p|} = A_{p'}, \quad \text{où} \quad p' = (|p|,0) .$$

On a donc pour tout $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $u \in D(A_{|p|})$

$$(2.62) \qquad A_{|p|}\begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ u_3(y) \\ u_4(y) \\ u_5(y) \\ u_6(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(y)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon(y)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon(y)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\frac{d}{dy} & |p| & 0 & 0 & 0 \\ i\frac{d}{dy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |p| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{d}{dy} & -|p| \\ 0 & 0 & 0 & -i\frac{d}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -|p| & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

soit, pour tout $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$, $p \neq 0$, la matrice 6×6 suivante

$$(2.63) \qquad U(p) = \frac{1}{|p|}\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & -p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ -p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice unitaire dans $\mathbb{C}^6$ dont l'inverse est donnée par la formule suivante

$$(2.64) \qquad U(p)^{-1} = U((p_1,-p_2))$$

La matrice $U(p)^{-1}$ est la matrice induite dans $\mathbb{C}^6$ par la rotation des axes de coordonnées dans le plan (x_1,x_2) où l'axe Ox_1 devient colinéaire au vecteur p.

Pour tout $p \neq 0$, $U(p)$ induit un opérateur unitaire dans $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

(2.65) $\quad (U(p)u)(y) = U(p)u(y)$ pour tout $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$.

On notera encore $U(p)$ cet opérateur unitaire sans risque de confusion avec 2.63.

On montre alors directement et facilement par le calcul que pour tout $p \neq 0$, A_p et $A_{|p|}$ sont unitairement équivalents.

Proposition 2.6

On a pour tout $p \neq 0$,

(2.66) $\quad D(A_p) = U(p)\, D(A_{|p|})$

(2.67) $\quad D(A_{|p|}) = U(p)^{-1}\, D(A_p)$

(2.68) $\quad A_{|p|} = U(p)^{-1}\, A_p\, U(p)$ *sur* $D(A_{|p|})$

(2.69) $\quad A_p = U(p)\, A_{|p|}\, U(p)^{-1}$ *sur* $D(A_p)$.

Maintenant, la proposition 2.6 montre donc dans $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ chacun des opérateurs A_p est pour tout $p \neq 0$ unitairement équivalent à la somme directe de deux opérateurs autoadjoints plus simples. Plus précisément :

Définition 2.10

Soient $\rho_1(y)$, $\rho_2(y)$ *deux fonctions numériques étagées strictement positives et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. On note* $\mathcal{H}(\rho_1, \rho_2; \mathbb{R})$ *l'espace de Hilbert formé de l'ensemble* $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^3)$ *muni du produit scalaire suivant*

$$(2.70)\qquad \left(\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix}\right)\right)_{H(\rho_1,\rho_2;\mathbb{R})} = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1(.)u_1' \\ \rho_2(.)u_2' \\ \rho_2(.)u_3' \end{pmatrix}\right)_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^3)}$$

Soit $A(\rho_1,\rho_2;r)$ *où* $r \in H$, *l'opérateur suivant dans* $H(\rho_1,\rho_2;\mathbb{R})$

$$D(A(\rho_1,\rho_2;r)) = \left\{\begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ u_3(y) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^3)\ ;\right.$$

$$(2.71)\qquad \left.\begin{pmatrix} \rho_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\frac{d}{dy} & r \\ i\frac{d}{dy} & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ u_3(y) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^3)\right\}$$

et

$$(2.72)\qquad (A(\rho_1,\rho_2;r)u)(y) = \begin{pmatrix} \rho_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\frac{d}{dy} & r \\ i\frac{d}{dy} & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ u_3(y) \end{pmatrix}$$

pour tout $u \in D(A(\rho_1,\rho_2;r))$.

On a alors comme précédemment la proposition suivante :

Proposition 2.7

$A(\rho_1,\rho_2;r)$ *est un opérateur autoadjoint dans* $H(\rho_1,\rho_2;\mathbb{R})$.

Maintenant nous identifions de manière évidente les espaces de Hilbert $H(\mathbb{R})$ et $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) \oplus H(\mu,\varepsilon;\mathbb{R})$. Des définitions 2.9 et 2.10 résulte immédiatement la proposition suivante :

Proposition 2.8

$$A_{|p|} = A(\varepsilon,\mu;|p|) \oplus - A(\mu,\varepsilon;|p|) .$$

L'analyse spectrale de l'opérateur A repose entièrement sur les définitions 2.6, 2.8 et sur les propositions 2.6 et 2.8. On commence donc par étudier complètement les propriétés spectrales ainsi qu'un développement en fonctions propres de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;|p|)$, on en déduit alors les propriétés spectrales ainsi qu'un développement en fonctions propres de l'opérateur $A_{|p|}$ en utilisant la proposition 2.8, puis de A_p en utilisant la proposition 2.6. On déduit alors les propriétés spectrales et un développement en fonctions propres pour A à partir des opérateurs A_p comme dans ([5], [6], [7]).

Pour clore ce chapitre, donnons quelques propriétés de régularité des solutions faibles de l'équation $A(\varepsilon,\mu;r)u = \lambda u$.

Définition 2.11

On note $D^{loc}(A(\rho_1,\rho_2;r))$ *l'ensemble suivant*

(2.73) $$D^{loc}(A(\rho_1,\rho_2;r)) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) ,\phi\, u \in D(A(\rho_1,\rho_2;r))$$

$$\textit{pour tout } \phi(.) \in C_0^\infty(\mathbb{R})\} .$$

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 2.9

Soient $\varepsilon(.)$ *et* $\mu(.)$ *les deux fonctions numériques vérifiant (2.1). Soit* $u \in D^{loc}(A(\varepsilon,\mu;r))$ *telle que*

(2.74) $$A(\varepsilon,\mu,r)u = \omega u \quad , \quad \omega \in \mathbb{C}$$

pour $\omega \neq 0$. *Alors chaque fonction* $u_j(.)$ $(j=1,2,3)$ *est analytique dans chacun des ouverts* (h,∞) , $(0,h)$ *et* $(-\infty,0)$. *De plus, les limites* *suivantes*

(2.75) $\lim\limits_{y \to h_+} u_j(y) \equiv u_j(h_+) \qquad j = 1,2,3$

(2.76) $\lim\limits_{y \to h_-} u_j(y) \equiv u_j(h_-) \qquad j = 1,2,3$

(2.77) $\lim\limits_{y \to 0_+} u_j(y) \equiv u_j(0_+) \qquad j = 1,2,3$

(2.78) $\lim\limits_{y \to 0_-} u_j(y) \equiv u_j(0_-) \qquad j = 1,2,3$

existent dans $\mathbb{R}$ *et on a*

(2.79) $u_j(h_+) = u_j(h_-)$ *pour* $j = 1,2$

(2.80) $u_j(0_+) = u_j(0_-)$ *pour* $j = 1,2$

(2.81) $\mu_2 u_3(h_+) = \mu_1 u_3(h_-)$

(2.82) $\mu_1 u_3(0_+) = \mu_0 u_3(0_-)$

Démonstration

(2.74) n'est rien d'autre que le système d'équations suivantes

(2.83) $i \frac{d}{dy} u_2 + r\, u_3 = \omega\, \varepsilon\, u_1$

(2.84) $i \frac{d}{dy} u_1 = \omega\, \mu\, u_2$

(2.85) $r\, u_1 = \omega\, \mu\, u_3$.

Si l'on se restreint à l'ouvert (h,∞) et si on substitue alors (2.84) et (2.85) dans (2.83), on a :

$$(2.86) \qquad - \frac{d^2}{dy^2} u_1 + r^2 u_1 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 u_1 .$$

Si l'on se restreint à l'ouvert $(0,h)$, on a

$$(2.87) \qquad - \frac{d^2}{dy^2} u_1 + r^2 u_1 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 u_1 .$$

Finalement, si l'on se restreint à l'ouvert $(-\infty,0)$, on a

$$(2.88) \qquad - \frac{d^2}{dy^2} u_1 + r^2 u_1 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 u_1 .$$

Il résulte alors des théorèmes classiques de régularité que $u_1(.)$ est bien une fonction analytique dans chacun des ouverts $(-\infty,0)$, $(0,h)$, (h,∞). De $u \in D^{loc}(A(\varepsilon,\mu;r))$, on déduit facilement que $u_1 \in H^2_{loc}((-\infty,0))$ et, en vertu de (2.84), que $u_2 \in H^1_{loc}((-\infty,0))$. On en déduit alors (2.78). De même a-t-on $u_1 \in H^2_{loc}((h,\infty))$ et $u_2 \in H^1_{loc}((h,\infty))$. Par suite (2.75) est vérifié. Enfin, on a $u_1 \in H^2((0,h))$ et $u_2 \in H^1((0,h))$ d'où l'on déduit (2.76) et (2.77). L'existence des limites (2.75)-(2.78) pour $j = 3$ se déduit immédiatement de (2.85).

Soit $\chi_0(.)$ (resp. $\chi_1(.),\chi_2(.)$) la fonction caractéristique de l'intervalle $(-\infty,0)$ (resp. $(0,h),(h,\infty)$). Si $u \in D^{loc}(A(\varepsilon,\mu;r))$ vérifie (2.74), alors on a pour presque tout $y \in \mathbb{R}$:

$$(2.89) \qquad u(y) = \chi_0(y) + \chi_1(y)u(y) + \chi_2(y)u(y) .$$

En substituant dans (2.83) et (2.84) et en tenant compte des mêmes équations, on obtient

$$(2.90) \qquad i(u_j(0_-) - u_j(0_+))\delta + i(u_j(h_-) - u_j(h_+))\delta_h = 0 \qquad j=1,2$$

où δ (resp. δ_h) est la mesure de Dirac en 0 (resp. h). Dè (2.90), on déduit immédiatement (2.79) et (2.80). (2.81) et (2.82) se déduisent immédiatement de (2.79)-(2.80) et (2.85). $\square$

3. LE SPECTRE PONCTUEL DE L'OPERATEUR $A(\varepsilon,\mu;r)$ AVEC $r > 0$.

Dans ce chapitre, nous étudions le spectre ponctuel de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$; en particulier l'étude des valeurs propres non nulles et de leur variation en fonction de r est importante pour la suite. Nous distinguerons le cas des valeurs propres non nulles de celui de $\{0\}$ et nous commencerons par étudier les premières.

Les fonctions numériques $\varepsilon(.)$ et $\mu(.)$ sont données par (2.1). L'opérateur autoadjoint $A(\varepsilon,\mu;r)$ est défini par (2.70) et (2.71). La proposition suivante permet de simplifier l'étude du spectre ponctuel de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$.

Proposition 3.1

Le spectre ponctuel non nul de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, *est symétrique par rapport à l'origine.*

Démonstration

Soit, en effet, $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$, $u \neq 0$, telle que

$$A(\varepsilon,\mu;r)u = \omega\, u \tag{3.1}$$

pour $\omega \in \mathbb{R}$ et $\omega \neq 0$.

On a donc

$$i\,\frac{d}{dy}\,u_2(y) + r\,u_3(y) = \omega\,\varepsilon(y)\,u_1(y) \tag{3.2}$$

$$i\,\frac{du_1}{dy}(y) = \omega\,\mu(y)\,u_2(y) \tag{3.3}$$

$$r\,u_1(y) = \omega\,\mu(y)\,u_3(y)\ . \tag{3.4}$$

On voit immédiatement que $-\omega$ est aussi valeur propre pour le vecteur propre

$$(3.5) \qquad v(y) = \begin{pmatrix} u_1(y) \\ -u_2(y) \\ -u_3(y) \end{pmatrix} .$$

Comme $v(.) \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ et $v(.) \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$, la proposition est démontrée. □

Nous commençons par étudier le cas des profils (2.1) du type 2 et du type 3 (cf. (2.11) et (2.12)) car le résultat dans ces deux cas est particulièrement simple.

Théorème 3.2

Si $0 < c_0 \leq c_1 \leq c_2$, *alors le spectre ponctuel non nul de l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, *est vide.*

<u>Démonstration</u>

La démonstration se fait en plusieurs étapes soit donc $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$, $u \neq 0$ vérifiant (3.1)-(3.4). En vertu de la proposition 3.1, il suffit de supposer $\omega > 0$. De plus, on sait, d'après la proposition 2.9, que chacune des fonctions $u_j(.)$ vérifiant (3.2)-(3.4) est analytique dans chacun des ouverts $(-\infty,0)$, $(0,h)$ et (h,∞). De plus, $u_1(.)$ vérifie l'équation du second ordre suivante

$$(3.6) \qquad -\frac{d^2}{dy^2} u_1 + r^2 u_1 = \frac{\omega^2}{C_j^2} u_1$$

avec $j = 0$ pour $y \in (-\infty,0)$, $j = 1$ pour $y \in (0,h)$ et $j = 2$ pour $y \in (h,\infty)$.

<u>a</u>) Supposons que $\omega \in (c_2 r,\infty)$.

Posons alors

$$(3.7)\qquad \xi_0 = \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - r^2\right)^{1/2}$$

$$(3.8)\qquad \xi_1 = \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - r^2\right)^{1/2}$$

$$(3.9)\qquad \xi_2 = \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - r^2\right)^{1/2} .$$

Soit $u(.)$ solution de (3.1); compte tenu de (3.6), il existe des constantes A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2 telles que

$$(3.10)\qquad u_1(y) = \begin{cases} A_0\, e^{i\xi_0 y} + B_0\, e^{-i\xi_0 y} & y < 0 \\ A_1\, e^{i\xi_1 y} + B_1\, e^{-i\xi_1 y} & 0 < y < h \\ A_2\, e^{i\xi_2 y} + B_2\, e^{-i\xi_2 y} & y > h \ . \end{cases}$$

Comme $u_1(.)$ doit, en particulier, appartenir à $L^2(\mathbb{R})$, on voit immédiatement que

$$(3.11)\qquad A_0 = B_0 = A_2 = B_2 = 0 \ .$$

De plus $u_1(.)$ doit vérifier les deux conditions (2.79) et (2.80). En particulier la condition (2.80) se traduit par

$$(3.12)\qquad A_1 = - B_1 \ .$$

De (3.3), on déduit que

$$(3.13) \qquad u_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ -\dfrac{\xi_1}{\omega \mu_1} A_1 (e^{i\xi_1 y} + e^{-i\xi_1 y}) & 0 < y < h \\ 0 & y > h \end{cases}$$

De même $u_2(.)$ doit vérifier la condition (2.80) qui se traduit par

$$(3.14) \qquad \frac{\xi_1}{\omega \mu_1} A_1 = 0 \ .$$

Comme $\xi_1 > 0$, $\mu_1 > 0$ et $\omega > 0$, on en déduit que $A_1 = 0$. Par suite, $u_1(y) \equiv u_2(y) \equiv 0$. De (3.4), on déduit que $u_3(y) \equiv 0$.

Donc l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$ ne possède pas de valeur propre dans l'intervalle $(c_2 r,\infty)$.

b) Supposons que $c_1 < c_2$ et $\omega \in (c_1 r, c_2 r)$
Posons dans ce cas

$$(3.15) \qquad \xi_2' = (r^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})^{1/2} \ .$$

Nous avons alors dans ce cas, compte tenu de la condition (2.80) et du fait que $u_1(.) \in L^2(\mathbb{R})$:

$$(3.16) \qquad u_1(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 0 & 0 < y < h \\ A_2 \ e^{-\xi_2' y} & h < j \end{cases}$$

et

$$(3.17) \qquad u_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 0 & 0 < y < h \\ -\dfrac{i\xi_2'}{\omega \mu_2} A_2 \ e^{-\xi_2' y} & h < y \end{cases}$$

La condition (2.79) pour $u_1(.)$ donne

$$(3.18) \qquad A_2 \, e^{-\xi_2' h} = 0 \, .$$

Par suite $A_2 = 0$ et $u(y) \equiv 0$.

Donc, si $c_1 < c_2$, l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, n'a pas de valeur propre dans l'intervalle $(c_1 r, c_2 r)$.

c) Supposons que $c_0 < c_1$ et soit $\omega \in (c_0 r, c_1 r)$
On pose dans ce cas, en plus de (3.15) :

$$(3.19) \qquad \xi_1' = (r^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2})^{1/2} \, .$$

On a alors, compte tenu du fait que $u_1(.) \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(3.20) \qquad u_1(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ A_1 \, e^{-\xi_1' y} + B_1 \, e^{\xi_1' y} & 0 < y < h \\ A_2 \, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

et

$$(3.21) \qquad u_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{i\xi_1'}{\omega \, \mu_1} (B_1 \, e^{\xi_1' y} - A_1 \, e^{-\xi_1' y}) & 0 < y < h \\ \dfrac{- i \, \xi_2'}{\omega \, \mu_2} A_2 \, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

Or, la condition (2.80) appliquée à $u_1(.)$ et $u_2(.)$ donne

(3.22) $A_1 = B_1 = 0$

et la condition (2.79) donne alors

(3.23) $A_2 = 0$.

Par suite $u(y) \equiv 0$.

Donc, si $c_0 < c_1$, l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, n'a pas de valeur propre dans l'intervalle $(c_0 r, c_1 r)$.

d) Considérons le cas où $\omega \in (0,c_0 r)$.

Posons dans ce cas, en plus de (3.15) et (3.19),

(3.24) $$\xi_0' = (r^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2})^{1/2} .$$

Il existe alors des constantes A_0, A_1, B_1 et A_2 telles que l'on ait

(3.25) $$u_1(y) = \begin{cases} A_0 \, e^{\xi_0' y} & y < 0 \\ A_1 \, e^{-\xi_1' y} + B_1 \, e^{\xi_1' y} & 0 < y < h \\ A_2 \, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

La condition (2.80) pour $u_1(.)$ se traduit par

(3.26) $A_0 = A_1 + B_1$,

et la condition (2.79) se traduit par

(3.27) $$A_2 \, e^{-\xi_2' h} = A_1 \, e^{-\xi_1' h} + B_1 \, e^{\xi_1' h} .$$

De même a-t-on :

$$(3.28) \qquad u_2(y) = \begin{cases} \dfrac{i\xi_0'}{\omega\,\mu_0} \; A_0 \; e^{\xi_0' y} & y < 0 \\[2ex] -\dfrac{i\;\xi_1'}{\omega\,\mu_1} \; (A_1 \; e^{-\xi_1' y} - B_1 \; e^{\xi_1' y}) & 0 < y < h \\[2ex] -\dfrac{i\;\xi_2'}{\omega\,\mu_2} \; A_2 \; e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

La condition (2.80) pour $u_2(.)$ se traduit par

$$(3.29) \qquad \frac{\xi_0'}{\mu_0} \; A_0 = \frac{\xi_1'}{\mu_1} \; (B_1 - A_1) \; .$$

De même, la condition (2.79) se traduit par

$$(3.30) \qquad A_2 \; e^{-\xi_2' h} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\xi_1'}{\xi_2'} \; (A_1 \; e^{-\xi_1' h} - B_1 \; e^{\xi_1' h}) \; .$$

Si $A_0 = 0$, on montre exactement comme précédemment que $u(y) \equiv 0$, i.e., dans ce cas ω n'est pas valeur propre.

Donc, si ω est valeur propre, on doit avoir $A_0 \neq 0$. La fonction propre n'étant déterminée qu'à une constante multiplicative près, posons $A_0 = 1$.

De (3.26) et (3.29), on déduit que

$$(3.31) \qquad A_1 = \frac{1}{2} \; (1 - \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{\xi_0'}{\xi_1'})$$

$$(3.32) \qquad B_1 = \frac{1}{2} \; (1 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{\xi_0'}{\xi_1'}) \; .$$

De (3.27) et (3.30), on déduit que

$$(3.33) \qquad A_1\, e^{-\xi_1' h} + B_1\, e^{\xi_1' h} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\xi_1'}{\xi_2'}\,(A_1\, e^{-\xi_1' h} - B_1\, e^{\xi_1' h}) \,.$$

En substituant (3.31) et (3.32) dans (3.33), on trouve que l'on doit avoir l'égalité suivante

$$(3.34) \qquad e^{2\xi_1' h} = \frac{\left(\frac{\xi_0'}{\mu_0} - \frac{\xi_1'}{\mu_1}\right)\left(\frac{\xi_2'}{\mu_2} - \frac{\xi_1'}{\mu_1}\right)}{\left(\frac{\xi_0'}{\mu_0} + \frac{\xi_1'}{\mu_1}\right)\left(\frac{\xi_2'}{\mu_2} + \frac{\xi_1'}{\mu_1}\right)} \,.$$

Comme ξ_1' est strictement positif, on voit que l'égalité (3.34) n'est jamais vérifiée car le membre de gauche est toujours strictement plus grand que 1 et le membre de droite strictement inférieur à 1.
Par suite, on ne peut avoir $A_0 \neq 0$.

Donc l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ n'a pas de valeur propre dans l'intervalle $(0,c_0 r)$.

e) Supposons que $\omega = c_0 r$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

Il existe alors des constantes A_1, B_1 et A_2 telles que $u_1(.)$ et $u_2(.)$ soient données respectivement par (3.20) et (3.21). De nouveau l'application des conditions (2.79) et (2.80) montre que $A_1 = B_1 = A_2 = 0$. Par suite $u(y) \equiv 0$. Donc $c_0 r$ n'est jamais valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

f) Supposons maintenant que $\omega = c_1 r$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$.

Il existe alors des constantes A_1, B_1 et A_2 telles que l'on ait

$$(3.35) \qquad u_1(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ A_1 y + B_1 & 0 < y < h \\ A_2\, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

et

$$(3.36)\qquad u_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{i}{\omega\,\mu_1} A_1 & 0 < y < h \\ -\,i\,\dfrac{\xi_2'}{\omega\,\mu_2} A_2\, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

L'application des conditions (2.79) et (2.80) donnent immédiatement $A_1 = B_1 = A_2 = 0$. Par suite $u(y) \equiv 0$ et $c_1 r$ n'est jamais valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

g) Supposons enfin que $\omega = c_2 r$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$. Il existe alors deux constantes A_1 et B_1 telles que

$$(3.37)\qquad u_1(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ A_1\, e^{i\xi_1 y} + B_1\, e^{-i\xi_1 y} & 0 < y < h \\ 0 & y > h \end{cases}$$

et

$$(3.38)\qquad u_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ -\,\dfrac{\xi_1}{\omega\,\mu_1} A_1 (e^{i\xi_1 y} + e^{-i\xi_1 y}) & 0 < y < h \\ 0 & y > h \end{cases}$$

Nous sommes alors dans le même cas que dans a); nous avons donc $u(y) \equiv 0$ et $c_2 r$ n'est pas valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$.

Rassemblant les conclusions de a) à g) et compte tenu de la proposition 3.1, on voit que le théorème 3.2 est démontré. $\square$

De même nous avons

Théorème 3.3

Si $0 < c_0 \leq c_2 \leq c_1$, *alors le spectre ponctuel non nul de l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, *est vide.*

Démonstration

Si $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$ vérifie (3.1) pour $\omega \in (c_1 r,\infty)$, alors la même démonstration que celle utilisée dans le sous-paragraphe a) de la démonstration du théorème 3.2 montre que $u(.)$ doit être nécessairement nulle.
De même, lorsque $\omega \in (0,c_0 r)$, il suffit de répéter la démonstration utilisée en d) dans celle du théorème 3.2 pour montrer aussi que $u \equiv 0$. Aussi l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, n'a pas, dans ce cas, de valeur propre dans chacun des intervalles $(0,c_0 r)$ et $(c_1 r,\infty)$.

a) Supposons que $c_2 < c_1$ et supposons que $\omega \in (c_2 r,c_1 r)$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

Soit $u \in D(\mathring{A}(\varepsilon,\mu;r))$ vérifiant (3.1). Il existe alors des constantes A_1 et B_1 telles que

$$(3.39) \qquad u_1(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ A_1\, e^{-\xi_1' y} + B_1\, e^{\xi_1' y} & 0 < y < h \\ 0 & y > h \end{cases}$$

et

$$(3.40) \qquad u_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ -\, i\, \dfrac{A_1 \xi_1'}{\omega\, \mu_1} (e^{-\xi_1' y} + e^{\xi_1' y}) & 0 < y < h \\ 0 & y > h \end{cases}$$

Les conditions (2.79) et (2.80) montrent immédiatement que $A_1 = B_1 = 0$; par suite $u(.) \equiv 0$ et l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ n'a pas de valeur propre dans l'intervalle (c_2r, c_1r).

b) Supposons que $c_0 < c_2$ et supposons que $\omega \in (c_0r, c_2r)$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$. Soit $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r)$ vérifiant (3.1). Il existe alors des constantes A_1, B_1 et A_2 telles $u_1(y)$ et $u_2(y)$ soient données respectivement par les expressions (3.20) et (3.21). Par suite, la conclusion est la même que dans le sous-paragraphe c) de la démonstration du théorème 3.2. On peut donc affirmer que dans notre cas, l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ n'a pas de valeur propre dans l'intervalle (c_0r, c_2r).

c) Supposons que $\omega = c_1r$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$. Soit $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$ vérifiant (3.1). Il existe alors des constantes A_1 et B_1 telles que

$$(3.41) \qquad u_1(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ A_1y + B_1 & 0 < y < h \\ 0 & y > h \end{cases}$$

et

$$(3.42) \qquad u_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{i}{\omega\,\mu_1} A_1 & 0 < y < h \\ 0 & y > h \end{cases}$$

L'application des conditions (2.79) et (2.80) donnent immédiatement $A_1 = B_1 = 0$ et c_1r n'est jamais valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r>0$.

d) Supposons que $\omega = c_2r$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$. Soit $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r)$ vérifiant (3.1). Il existe alors des constantes A_1

et B_1 telles que $u_1(.)$ et $u_2(.)$ soient respectivement données par (3.39) et (3.40). De nouveau, l'application des conditions (2.79) et (2.80) montre que c_2r n'est jamais valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

e) Supposons que $\omega = c_0r$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$. Soit $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$ vérifiant (3.1). Il existe alors des constantes A_1, B_1 et A_2 telles que $u_1(.)$ et $u_2(.)$ soient respectivement données par (3.20) et (3.21). La même démonstration que celle utilisée dans le sous-paragraphe c) de la démonstration du théorème 3.2 montre que c_0r n'est jamais valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

Rassemblant l'ensemble des conclusions obtenues, on voit immédiatement que le théorème 3.3 est démontré. □

Le cas le plus important et le plus intéressant sur le plan des applications est celui des profils de type 1 (cf. 2.10). C'est en effet le seul cas où l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ peut avoir un spectre ponctuel non vide. Cela se traduira, comme nous le verrons plus tard, par l'existence d'ondes guidées très utilisées dans la pratique.

La proposition suivante permet de localiser le spectre ponctuel s'il existe.

Proposition 3.4

Si $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$, *alors l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ *ne possède pas de valeur propre dans*

$$(0,c_1r] \cup [c_0r,\infty) \cup [-c_1r,0) \cup (-\infty,-c_0r]$$

Démonstration

Si $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$, $u \neq 0$, vérifie (3.1)-(3.4), en vertu de la proposition 3.1, il suffit de supposer $\omega > 0$.

Si $\omega \in (c_2r,\infty)$ (resp. $(0,c_1r)$), alors la même démonstration que celle utilisée dans le sous-paragraphe a) (resp. d)) de la démonstration du théorème 3.2 montre que $u(.)$ doit être nécessairement nulle. Ainsi l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, n'a pas, dans ce cas, de valeur propre dans chacun des intervalles $(0,c_1r)$ et (c_2r,∞).

Supposons $c_0 < c_2$ et que la valeur propre ω appartient à (c_0r,c_2r). On vérifie alors immédiatement que $u_1(.)$ et $u_2(.)$, les deux premières composantes de $u(.)$, sont données respectivement par (3.16) et (3.17); on en déduit alors, comme dans le sous-paragraphe b) de la démonstration du théorème 3.2, que $u(.) \equiv 0$ et que, par suite, l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$ n'a pas de valeur propre dans l'intervalle (c_0r, c_2r).

Montrons maintenant qu'aucun des points $\{c_0r\}$, $\{c_1r\}$ et $\{c_2r\}$ n'est valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

Supposons que $\omega = c_1r$; il existe alors des constantes A_0, A_1, B_1, A_2 telles que

$$(3.43) \qquad u_1(y) = \begin{cases} A_0\, e^{\xi_0' y} & y < 0 \\ A_1 y + B_1 & 0 < y < h \\ A_2\, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

La condition (2.80) pour $u_1(.)$ se traduit par

$$(3.44) \qquad B_1 = A_0$$

et la condition (2.79) par

$$(3.45) \qquad A_1 h + A_0 = A_2\, e^{-\xi_2' h} .$$

De même a-t-on

$$(3.46)\qquad u_2(y) = \begin{cases} i\,\dfrac{\xi_0'}{\omega\,\mu_0}\,A_0\,e^{\xi_0' y} & y < 0 \\ i\,\dfrac{A_1}{\omega\,\mu_1} & 0 < y < h \\ -i\,\dfrac{\xi_2'}{\omega\,\mu_2}\,A_2\,e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

La condition (2.80), appliquée à $u_2(.)$, donne

$$(3.47)\qquad \frac{\xi_0'}{\mu_0}\,A_0 = \frac{A_1}{\mu_1}$$

et la condition (2.79) donne

$$(3.48)\qquad \frac{A_1}{\mu_1} = -\,\frac{\xi_2'}{\mu_2}\,A_2\,e^{-\xi_2' y}\ .$$

Si $A_0 = 0$, on voit de proche en proche que $A_1 = A_2 = 0$; par suite, $\omega = c_1 r$ n'est pas valeur propre dans ce cas. Supposons donc $A_0 \neq 0$ et posons $A_0 = 1$. Rassemblant (3.45), (3.47) et (3.48), on vérifie immédiatement que l'on doit avoir la relation de compatibilité suivante :

$$(3.49)\qquad \frac{\mu_1}{\mu_0}\xi_0'\,h + \frac{\mu_2}{\mu_0}\,\frac{\xi_0'}{\xi_2'} + 1 = 0\ .$$

Comme $\mu_1 > 0$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\xi_0' > 0$ et $\xi_2' > 0$, on voit que l'égalité (3.49) n'est jamais vérifiée; par suite, $\omega = c_1 r$ n'est jamais valeur propre.

Supposons $c_0 < c_2$ et supposons que $\omega = c_0 r$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$. Soit $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$ vérifiant (3.1); il existe alors des constantes A_1, B_1 et A_2 telles que l'on ait

$$(3.50) \qquad u_1(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ A_1\, e^{i\xi_1 y} + B_1\, e^{-i\xi_1 y} & 0 < y < h \\ A_2\, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

et

$$(3.51) \qquad u_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ -\dfrac{\xi_1}{\omega\,\mu_1}(A_1\, e^{i\xi_1 y} - B_1\, e^{-i\xi_1 y}) & 0 < y < h \\ -\, i\,\dfrac{\xi_2'}{\omega\,\mu_2}\, A_2\, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

L'application des conditions (2.79) et (2.80) donnent immédiatement $A_1 = B_1 = A_2 = 0$. Par suite $u(y) \equiv 0$ et $c_0 r$ n'est pas valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, si $c_0 < c_2$.

Supposons enfin que $\omega = c_2 r$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$. Soit $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$ vérifiant (3.1), il existe des constantes A_1 et B_1 telles que l'on ait

$$(3.52) \qquad u_1(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ A_1\, e^{i\xi_1 y} + B_1\, e^{-i\xi_1 y} & 0 < y < h \\ 0 & y > h \end{cases}$$

L'application des conditions (2.79) et (2.80) montre immédiatement que $A_1 = B_1 = 0$. Par suite, comme précédemment, on a $u(y) \equiv 0$ et $\omega = c_2 r$ n'est jamais valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

Rassemblant l'ensemble des résultats obtenus, on voit que la proposition 3.4 est démontrée. □

La conséquence immédiate de la proposition 3.4 est que, si on a $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$, les valeurs propres positives de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, si elles existent, appartiennent à l'intervalle $(c_1 r, c_0 r)$.

Cherchons quelle est la condition nécessaire pour que $\omega \in (c_1 r, c_0 r)$ soit valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

Soit donc $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$, $u \neq 0$ vérifiant (3.1)-(3.4) avec $\omega \in (c_1 r, c_0 r)$.

On montre comme précédemment qu'il existe des constantes A_0, A_1, B_1 et A_2 telles que

$$(3.53) \qquad u_1(y) = \begin{cases} A_0 \, e^{\xi_0' y} & y < 0 \\ A_1 \, e^{i\xi_1 y} + B_1 \, e^{-i\xi_1 y} & 0 < y < h \\ A_2 \, e^{-\xi_2' y} & y > h \end{cases}$$

$u_1(.)$ doit vérifier les conditions (2.79) et (2.80), ce qui donne

$$(3.54) \qquad A_0 = A_1 + B_1$$

$$(3.55) \qquad A_2 \, e^{-\xi_2' h} = A_1 \, e^{i\xi_1 h} + B_1 \, e^{-i\xi_1 h} .$$

De même, a-t-on

$$(3.56)\qquad u_2(y) = \begin{cases} \dfrac{i}{\omega\,\mu_0}\,\xi'_0\,A_0\,e^{\xi'_0 y} & y < 0 \\[2ex] -\dfrac{\xi_1}{\omega\,\mu_1}\,(A_1\,e^{i\xi_1 y} - B_1\,e^{-i\xi_1 y}) & 0 < y < h \\[2ex] -\dfrac{i\xi'_2}{\omega\,\mu_2}\,A_2\,e^{-\xi'_2 y} & y > h \end{cases}$$

$u_2(.)$ doit vérifier les conditions (2.79) et (2.80) ce qui donne

$$(3.57)\qquad \frac{i}{\omega\,\mu_0}\,\xi'_0\,A_0 = -\frac{\xi_1}{\omega\,\mu_1}\,(A_1 - B_1)$$

$$(3.58)\qquad i\,\frac{\xi'_2}{\mu_2}\,A_2\,e^{-\xi'_2 h} = \frac{\xi_1}{\mu_1}\,(A_1\,e^{i\xi_1 h} - B_1\,e^{-i\xi_1 h}) .$$

Remarquons que si $A_0 = 0$, alors (3.54) et (3.57) montrent que $A_1 = B_1 = 0$ et (3.55) montre que $A_2 = 0$. Donc $u(.) \equiv 0$ et ω n'est pas valeur propre. Par suite, si $\omega \in (c_1 r, c_0 r)$ est valeur propre, on doit avoir $A_0 \neq 0$. Comme toute fonction propre est déterminée à une constante multiplicative près, on peut supposer $A_0 = 1$.

Résolvant alors (3.54) et (3.57), on trouve que

$$(3.59)\qquad A_1 = \frac{1}{2}\,(1 - i\,\frac{\mu_1}{\mu_0}\,\frac{\xi'_0}{\xi_1})$$

$$(3.60)\qquad B_1 = \frac{1}{2}\,(1 + i\,\frac{\mu_1}{\mu_0}\,\frac{\xi'_0}{\xi_1}) .$$

De (3.55) et (3.58), on déduit que l'égalité suivante doit être vérifiée

$$(3.61)\qquad A_1\,e^{i\xi_1 h} + B_1\,e^{-i\xi_1 h} = -\,i\,\frac{\mu_2}{\mu_1}\,\frac{\xi_1}{\xi'_2}\,(A_1\,e^{i\xi_1 h} - B_1\,e^{-i\xi_1 h}) .$$

En reportant (3.59) et (3.60) dans (3.61), on trouve que l'on doit avoir la relation de compatibilité suivante :

$$(3.62) \qquad e^{-2i\xi_1 h} = \frac{\left(\frac{\xi_1}{\mu_1} - i\,\frac{\xi'_2}{\mu_2}\right)\left(\frac{\xi_1}{\mu_1} - i\,\frac{\xi'_0}{\mu_0}\right)}{\left(\frac{\xi_1}{\mu_1} + i\,\frac{\xi'_2}{\mu_2}\right)\left(\frac{\xi_1}{\mu_1} + i\,\frac{\xi'_0}{\mu_0}\right)} .$$

L'équation (3.62) est la condition nécessaire que doit vérifier toute valeur propre $\omega(r)$ de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, dans l'intervalle $(c_1 r, c_0 r)$.

Réciproquement, à chaque valeur $\omega(r) \in (c_1 r, c_0 r)$ de (3.62), il correspond par (3.56), (3.59) et (3.60) une fonction propre $u(.)$ vérifiant (3.1)-(3.4) et déterminée à une constante multiplicative près.

Par suite, l'ensemble des valeurs propres strictement positives de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$ s'identifie à l'ensemble des solutions $\omega(r)$ de l'équation (3.62) et chaque valeur propre est simple. Nous sommes donc ramenés à la recherche des solutions $\omega(r)$ de l'équation (3.62).

Définition et étude des relations de dispersion

On montre facilement à partir de (3.62) que l'on a

$$(3.63) \qquad \operatorname{tg} \xi_1 h = \frac{\frac{\xi_1 \xi'_0}{\mu_1 \mu_0} + \frac{\xi_1 \xi'_2}{\mu_1 \mu_2}}{\left(\frac{\xi_1}{\mu_1}\right)^2 - \frac{\xi'_0}{\mu_0}\,\frac{\xi'_2}{\mu_2}} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{Arctg} \frac{\mu_1}{\mu_0}\,\frac{\xi'_0}{\xi_1} + \operatorname{Arctg} \frac{\mu_1}{\mu_2}\,\frac{\xi'_2}{\xi_1}\right)$$

(3.62) est donc équivalente à l'ensemble des équations suivantes

$$(3.64) \qquad \xi_1 h = \operatorname{Arctg} \frac{\mu_1}{\mu_0}\,\frac{\xi'_0}{\xi_1} + \operatorname{Arctg} \frac{\mu_1}{\mu_2}\,\frac{\xi'_2}{\xi_1} + k\pi \qquad , \qquad k = 0,1,2,\ldots .$$

Remarquons que k ne peut pas prendre des valeurs entières négatives car $\xi_1 h$ est toujours strictement positif et on a

(3.65) $\quad 0 < \operatorname{Arctg} \dfrac{\mu_1}{\mu_0} \dfrac{\xi_0'}{\xi_1} < \dfrac{\pi}{2}$

(3.66) $\quad 0 < \operatorname{Arctg} \dfrac{\mu_1}{\mu_2} \dfrac{\xi_2'}{\xi_1} < \dfrac{\pi}{2}$

On ramène donc l'étude des solutions $\omega(r)$ de (3.62) à celles des équations (3.64).

Posons

(3.67) $\quad F(\omega,r) = \dfrac{1}{\pi} \{\xi_1 h - \operatorname{Arctg} \dfrac{\mu_1}{\mu_0} \dfrac{\xi_0'}{\xi_1} - \operatorname{Arctg} \dfrac{\mu_1}{\mu_2} \dfrac{\xi_2'}{\xi_1}\}$.

On a alors

(3.68)
$$\frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega,r) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega}{\xi_1} \{\frac{h}{c_1^2} + (\frac{\mu_1}{\mu_0}) \frac{1}{1 + (\frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{\xi_0'}{\xi_1})^2} (\frac{1}{c_0^2 \xi_0'} + \frac{\xi_0'}{c_1^2 \xi_1^2})$$
$$+ (\frac{\mu_1}{\mu_2}) \frac{1}{1 + (\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\xi_2'}{\xi_1})^2} (\frac{1}{c_2^2 \xi_2'} + \frac{\xi_2'}{c_1^2 \xi_1^2}) \} \quad .$$

En particluier $\dfrac{\partial F}{\partial \omega}(\omega,r) > 0$ pour $c_1 r < \omega < c_0 r$.

Ainsi pour tout $r > 0$, fixé, la fonction $\omega \to F(\omega,r)$ est une fonction strictement croissante de la variable ω dans l'intervalle $(c_1 r, c_0 r)$ avec pour minimum

(3.69) $\quad F(c_1 r,r) = -1$

et pour maximum

$$(3.70) \qquad F(c_0 r,r) = \frac{1}{\pi}\left\{hr\left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 1\right)^{1/2} - \mathrm{Arctg}\,\frac{\mu_1}{\mu_2}\,\frac{\left(1-\left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 1\right)^{1/2}}\right\} .$$

Aussi, pour tout $r > 0$ et $k = 0,1,2,\ldots$, fixés, (3.64) possède au plus une solution, notée $\omega_k(r)$, dans l'intervalle $(c_1 r, c_0 r)$.

Les fonctions $\omega_k(r)$, $k = 0,1,2,\ldots$, sont appelées les relations de dispersion.

Soit k fixé, alors $\omega_k(r)$ existe si et seulement si

$$(3.71) \qquad F(c_0 r,r) > k$$

ou encore $\omega_k(r)$ existe si et seulement si

$$(3.72) \qquad r > r_k$$

où, par définition,

$$(3.73) \qquad r_k = \frac{1}{h\left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 1\right)^{1/2}}\left(k\pi + \mathrm{Arctg}\,\frac{\mu_1}{\mu_2}\,\frac{\left(1-\left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - 1\right)^{1/2}}\right) , \quad k=0,1,2,\ldots$$

r_k est, par définition, le seuil d'ordre k $(k=0,1,2,\ldots)$. Remarquons que

$$(3.74) \qquad r_{k_1} > r_{k_2} \quad \text{si} \quad k_1 > k_2 .$$

De plus, on a

$$(3.75) \qquad r_0 > 0 \quad \text{si} \quad c_0 < c_2 ,$$

et

(3.76) $r_0 = 0$ si $c_0 = c_2$.

On peut alors énoncer la proposition suivante

Proposition 3.5

Si $c_1 < c_0 \leq c_2$, *l'équation (3.64) possède, pour chaque* k, *une solution unique* $\omega_k(r)$ *pour tout* $r > r_k$ *et ne possède pas de solution lorsque* $r \leq r_k$.

Les fonctions $\omega_k(r)$, $k=0,1,2,\ldots$, *sont des fonctions analytiques de* r, *pour tout* $r > r_k$. *Enfin,* $\omega_{k_1}(r) > \omega_{k_2}(r)$ *si* $k_1 > k_2$ *et pour tout* $r > r_{k_1}$.

Démonstration

L'analycité des solutions $\omega_k(r)$ est une conséquence de l'analyticité de la fonction $F(\omega,r)$ dans le domaine $\{(\omega,r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; c_1 r < \omega < c_0 r\}$. De plus, on a $\frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega,r)$ sur ce domaine. Il suffit alors d'appliquer le théorème des fonctions implicites pour les fonctions analytiques. □

Proposition 3.6

Pour tout $k = 0,1,2,\ldots$, *on a*

$$\frac{d\omega_k}{dr} > 0 \quad \textit{pour tout} \quad r > r_k \; .$$

$\omega_k(r)$ *est donc une fonction croissante de* r. *De plus, on a*

$$\lim_{r \to r_k} \omega_k(r) = c_0 r_k$$

et si l'on pose

$$\omega_k(r_k) \equiv c_0 r_k \; ,$$

$\omega_k(r)$ *est une fonction définie et continue pour tout* $r \geq r_k$.

Démonstration

Par définition de $\omega_k(r)$, on a, pour tout $r > r_k$

(3.77) $F(\omega_k(r),r) = k$.

En différentiant par rapport à r, on obtient

(3.78) $$\frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega_k(r),r)\ \frac{d\omega_k}{dr} + \frac{\partial F}{\partial r}(\bar{\omega}_k(r),r) = 0 .$$

Or, on a

(3.79) $$\frac{\partial F}{\partial r}(\omega_k(r),r) = -\frac{r}{\pi\xi_1}\left(h + \left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{\xi'_0}{\xi_1}\right)^2}\left(\frac{1}{\xi'_0}+\frac{\xi'_0}{\xi_1^2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\xi'_2}{\xi_1}\right)^2}\left(\frac{1}{\xi'_2}+\frac{\xi'_2}{\xi_1^2}\right)\right) .$$

En particulier $\frac{\partial F}{\partial r}(\omega_k(r),r) < 0$. Compte tenu de (3.68), on en déduit immédiatement que $d\omega_k/dr > 0$. $\omega_k(r)$ est donc une fonction croissante de r. Par suite

$$\lim_{r\to r_k} \omega_k(r)$$

existe car $\omega_k(r)$ est croissante et bornée. De plus,

$$\omega_k = \lim_{r\to r_k} \omega_k(r)$$

est égal à c_0r_k car $F(c_0r_k,r_k) = k$. $\square$

Afin d'étudier plus complètement les relations de dispersion $\omega_k(r)$, il convient d'introduire une représentation paramétrique. On pose

(3.80) $\tau = \dfrac{\omega_k(r)}{r}$.

Comme $r \geq r_k$, on voit que

(3.81) $c_1 < \tau \leq c_0$.

On déduit immédiatement de (3.64) que l'on a, pour

$$(3.82)\quad r(\tau) = \frac{1}{h(c_1^{-2}\tau^2-1)^{1/2}}\left(\mathrm{Arctg}\left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\left(\frac{1-c_0^{-2}\tau^2}{c_1^{-2}\tau^2-1}\right)^{1/2}\right)\right.$$

$$\left. + \mathrm{Arctg}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{1-c_2^{-2}\tau^2}{c_1^{-2}\tau^2-1}\right)^{1/2}\right) + k\pi\right)$$

(3.83) $\omega_k(\tau) = \tau\, r(\tau)$.

On vérifie immédiatement par le calcul à partir de (3.82) que

(3.84) $\dfrac{dr}{d\tau} < 0$.

On peut donc inverser la fonction $r(\tau)$ sur $(c_1, c_0]$ et de la fonction réciproque $\tau(r)$ qui est une fonction décroissante pour r variant dans l'intervalle $[r_k, \infty)$.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.7

Pour $k=0,1,2,\ldots$, *la fonction* $\omega_k(r)$ *est définie pour tout* $r \geq r_k$. *De plus*

(i) $\omega_k(r)$ *est analytique sur* $[r_k, \infty)$

(ii) $\dfrac{\omega_k(r)}{r}$ *est une fonction décroissante de* r *et on a*

$$c_1 < \frac{\omega_k(r)}{r} \leq c_0 \quad \textit{pour tout} \quad r \in [r_k,\infty).$$

(iii) $\frac{d\omega_k}{dr} > 0$ *pour tout* $r \in [r_k,\infty)$.

(iv) $\omega_k(r_k) = c_0\, r_k \qquad \frac{d\omega_k}{dr}(r_k) = c_0$

(v) $\omega_k(r) \sim c_1 r$ *pour* $r \to \infty$.

Démonstration

La plupart des assertions ont été déjà démontrées.

De (3.68), on déduit facilement que

$$(3.86) \qquad \xi_0' \frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega_k,r) \sim \frac{1}{\pi}\frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{\omega}{\xi_1}\frac{1}{c_0^2} \quad \text{lorsque} \quad r \to r_k \quad \text{et lorsque} \quad c_0 < c_2$$

et

$$(3.87) \qquad \xi_0' \frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega_k,r) \sim \frac{1}{\pi}\frac{\mu_1}{c_0^2}\frac{\omega}{\xi_1}\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_2}\right) \quad \text{lorsque} \quad r \to r_k \quad \text{et lorsque} \quad c_0 = c_2 \; .$$

De même on montre facilement à partir de (3.79) que

$$(3.88) \qquad \xi_0' \frac{\partial F}{\partial r}(\omega_k,r) \sim -\frac{1}{\pi}\frac{\mu_1}{\mu_0}\frac{r}{\xi_1} \quad \text{lorsque} \quad r \to r_k \quad \text{et lorsque} \quad c_0 < c_2$$

et

$$(3.89) \qquad \xi_0' \frac{\partial F}{\partial r}(\omega_k,r) \sim -\frac{1}{\pi}\mu_1\frac{r}{\xi_1}\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_2}\right) \quad \text{lorsque} \quad r \to r_k \quad \text{et lorsque} \quad c_0 = c_2 .$$

Il résulte alors de (3.78) que l'on a

$$(3.89\text{bis}) \qquad \lim_{r\to r_k} \frac{d\omega_k}{dr}(r) = \lim_{r\to r_k} -\frac{\xi_0' \frac{\partial F}{\partial r}(\omega_k(r),r)}{\xi_0' \frac{\partial F}{\partial \omega}(\omega_k(r),r)} = c_0 \; .$$

Ainsi (iv) est démontrée complètement.

L'analyticité de $\omega_k(r)$ pour $r > r_k$ résulte de la proposition 3.5. En fait, il résulte de (iv) que l'on sait déjà que $\omega_k(r)$ est une fois continûment différentiable dans $[r_k,\infty)$.

On vérifie immédiatement à partir de (3.82) et de (3.83) que

(3.89ter) $\frac{dr}{d\tau} \neq 0$ pour $\tau = c_0^{-1}$.

(3.89ter) est aussi une conséquence de (3.89bis).

L'analyticité de $\omega_k(r)$ au voisinage de r_k résulte alors de (3.82), (3.83) et (3.89ter).

Avant de conclure par un théorème résumant tous les résultats obtenus jusqu'ici, nous montrons que $\{0\}$ est toujours valeur propre.

Proposition 3.8

Dans chacun des cas (2.10)-(2.12), $\{0\}$ *est toujours une valeur propre de multiplicité infinie de l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$.

<u>Démonstration</u>

Soit donc $u \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$ telle que

(3.90) $i\frac{du_2}{dy} + r\,u_3 = 0$

(3.91) $i\frac{du_1}{dy} = 0$

(3.92) $r\,u_1 = 0$.

On en déduit immédiatement que $u_1(y) \equiv 0$ et que (3.90) est la seule relation non triviale que doit vérifier les composantes $u_2(y)$ et $u_3(y)$.

Soit pour tout $p \in \mathbb{Z}$, une fonction $\phi_p(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

(3.93) (i) $\operatorname{supp} \phi_p \subset (p,p+1)$

(ii)

(3.94) $$\int_{m\phi_p}^{M\phi_p} \phi_p(y)dy = 0$$

où $m\phi_p = \inf_{y \in \operatorname{supp}\phi_p} y$ et $M\phi_p = \sup_{y \in \operatorname{supp}\phi_p} y$.

On définit maintenant la fonction $\psi_p(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ suivante

(3.95) $\psi_p(y) = 0$ si $y < m\phi_p$ et $y > M\phi_p$

et

(3.96) $$\psi_p(y) = \int_{m\phi_p}^{y} \phi_p(x)dx \quad \text{si} \quad m\phi_p \leq y \leq M\phi_p$$

on voit que $\operatorname{supp} \psi_p \subset (p,p+1)$.

Posons maintenant

(3.97) $$u^{(p)}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ir\,\psi_p(y) \\ \phi_p(y) \end{pmatrix} .$$

Alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et par construction $u^{(p)}(y) \in D(A(\varepsilon,\mu;r))$ et c'est un vecteur propre pour la valeur propre $\{0\}$. De plus, on a :

(3.98) $\quad (u^{(p)},u^{(p')})_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})} = 0$

pour tout $p \neq p'$.

On a donc construit une suite de vecteurs propres orthogonaux à deux pour la valeur propre $\{0\}$, ce qui démontre la proposition (3.8). □

En résumé, on peut énoncer le théorème fondamental suivant

Théorème 3.9

I. Si $0 < c_0 \leq c_1 \leq c_2$ *et* $0 < c_0 \leq c_2 \leq c_1$, *alors* $\{0\}$ *est la seule valeur propre de l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$. *C'est une valeur propre de multiplicité infinie.*

II. Si $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$, *alors :*

1. $\{0\}$ *est valeur propre de multiplicité infinie;*
2. *Si* $F(c_0 r,r) \leq 0$, *l'opérateur n'a pas d'autre valeur propre que* $\{0\}$;
3. *Si* $F(c_0 r,r) > 0$ *et pour tout* $r \neq r_k$, $k = 0,1,2,\ldots$, *posons* $N(r) = [F(c_0 r,r)]$, *où* $[a]$ *désigne la partie entière de* $a \in \mathbb{R}^+$. *Alors l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ *possède* $2(N(r)+1)$ *valeurs propres,* $\bar{\omega}_j(r)$, *différentes de zéro et simples telles que*
   (i)

(3.99) $$0 < c_1 r < \omega_0(r) < \omega_1(r) < \ldots < \omega_{N(r)}(r) < c_0 r \leq c_2 r$$

(3.100) $$-c_2 r \leq -c_0 r < -\omega_{N(r)} < -\omega_{N(r)-1}(r) < \ldots < -\omega_1(r) < -\omega_0(r) < \\ < -c_1 r < 0$$

   (ii) les propriétés de chacune des fonctions $r \to \omega_k(r)$, $k=0,1,\ldots, N(r)$ *soient données par le théorème 3.7.*

4. *Si* $r \leq r_0$, *l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, *n'a pas d'autre valeur propre que* $\{0\}$.
   Si $r = r_k$, *pour* $k \geq 1$, *l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$, *possède* $2k$ *valeurs propres différentes de zéro,* $\omega_j(r)$, *et simples telles que*

(3.101) $$0 < c_1 r < \omega_0(r) < \omega_1(r) < \dots < \omega_{k-1}(r) < c_0 r \leq c_2 r$$

(3.102) $$-c_2 r \leq -c_0 r < -\omega_{k-1}(r) < -\omega_{k-2}(r) < \dots < -\omega_1(r) < -\omega_0(r) < -c_1 r < 0 \ .$$

On peut maintenant décrire, à une constante multiplicative près $a_k(r)$, la fonction propre associée à la valeur propre $\omega_k(r)$. Posons

(3.103) $$\xi'_{i,k}(r) = \left(r^2 - \frac{(\omega_k(r))^2}{c_i^2}\right)^{1/2} \qquad i = 0,2$$

(3.104) $$\xi_{1,k}(r) = \left(\frac{(\omega_k(r))^2}{c_1^2} - r^2\right)^{1/2} .$$

On notera $u^{(k)}(y)$ la fonction propre correspondante,déterminée à une constante multiplicative près $a_k(r)$, et on a

(3.105) $$u^{(k)}(y,r) = \begin{pmatrix} u_1^{(k)}(y;r) \\ u_2^{(k)}(y\ ;r) \\ u_3^{(k)}(y;r) \end{pmatrix}$$

avec

(3.106) $$u_1^{(k)}(y,r) = \begin{cases} e^{\xi'_{0,k} y} & y \leq 0 \\ \cos \xi_{1,k}(r)y + \dfrac{\mu_1}{\mu_0}\dfrac{\xi'_{0,k}(r)}{\xi_{1,k}(r)} \sin \xi_{1,k} y & 0 \leq y \leq h \\ e^{\xi'_{2,k}(r)h}\Big(\cos \xi_{1,k}(r)h + \dfrac{\mu_1}{\mu_0}\dfrac{\xi'_{0,k}(r)}{\xi_{1,k}(r)} \sin \xi_{1,k}(r)h\Big) e^{-\xi'_{2,k} y} & y \geq h \end{cases}$$

$$(3.107)\quad u_2^{(k)}(y,r) = \begin{cases} \dfrac{i}{\omega_k(r)\mu_0}\ \xi'_{0,k}(r)\ e^{\xi'_{0,k}(r)y} & y \le 0 \\[2ex] - i\ \dfrac{\xi_{1,k}(r)}{\omega_k(r)\mu_1}\ (\sin \xi_{1,k}(r)y - \\ \qquad \dfrac{\mu_1}{\mu_0}\ \dfrac{\xi'_{0,k}(r)}{\xi_{1,k}(r)} \cos \xi_{1,k}(r)y) & 0 \le y \le h \\[2ex] - i\ \dfrac{\xi'_{2,k}(r)}{\omega_k(r)\mu_2}\ e^{\xi'_{2,k}(r)h}\ (\cos \xi_{1,k}(r)h + \\ \qquad \dfrac{\mu_1}{\mu_0}\ \dfrac{\xi'_{0,k}(r)}{\xi_{1,k}(r)} \sin \xi_{1,k}(r)h)e^{-\xi'_{2,k}y} & y \ge h \end{cases}$$

$$(3.108)\quad u_3^{(k)}(y,r) = \frac{r}{\omega_k(r)\mu(y)}\ u_1^{(k)}(y,r) \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R} - (\{0\}\cup\{h\}) .$$

La fonction propre associée à la valeur propre $-\omega_k(r)$ est, à une constante multiplicative près $a'_k(r)$, égale à

$$(3.109)\quad v^{(k)}(y,r) = \begin{pmatrix} u_1^{(k)}(y,r) \\[1ex] - u_2^{(k)}(y,r) \\[1ex] - u_3^{(k)}(y,r) \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u>

Il résulte de 4.) que, dans le cas symétrique $c_0 = c_2$ pour lequel $r_0 = 0$, l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ a toujours une valeur propre. Par contre si $c_0 < c_2$, on a $r_0 > 0$ et l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ n'a pas de valeur propre pour $0 < r \le r_0$.

4. LA RESOLVANTE DE L'OPERATEUR $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$

Dans ce chapitre, nous donnons une représentation explicite de la résolvante de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$. Ce résultat est évidemment la base de toute la théorie spectrale de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$, $r > 0$ ainsi que la construction d'un développement en fonctions propres pour le même opérateur. Il est donc essentiel pour la suite.

Pour les mêmes besoins, il nous sera nécessaire d'obtenir des variantes du théorème de représentation, variantes dues aux différents choix possibles des déterminations des fonctions $(r^2 - z^2 c_i^{-2})^{1/2}$ et $(z^2 c_2^{-2} - r^2)^{1/2}$, $i = 0,1,2$.

Définition 4.1

On pose

(4.1) $\zeta_i^+(z) = (z - c_i r)^{1/2}$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} - [c_i r,\infty)$

$(i = 0,1,2)$, *la détermination étant telle que*

(4.2) $0 < \operatorname{Arg} \zeta_i^+(z) < \pi$, $i = 0,1,2$.

De plus, on pose

(4.3) $\zeta_i^-(z) = (z + c_i r)^{1/2}$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} - (-\infty,-c_i r]$

$(i = 0,1,2)$, *la détermination étant telle que*

(4.4) $\operatorname{Re} \zeta_i^-(z) > 0$, $(i=0,1,2)$.

Finalement, on pose

(4.5) $\xi_i'(z) = - i\, c_i^{-1}\, \zeta_i^+(z)\, \zeta_i^-(z)$ $i = 0,1,2,$

pour tout $z \in \mathbb{C} - ((-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty))$.

Notons que l'on a

$$(4.6) \qquad \overline{\zeta_i^+(\bar{z})} = -\,\zeta_i^+(z) \qquad i = 0,1,2$$

$$(4.7) \qquad \overline{\zeta_i^-(\bar{z})} = \zeta_i^-(z) \qquad i = 0,1,2 \,.$$

Par suite, on a

$$(4.8) \qquad \overline{\xi_i'(\bar{z})} = \xi_i'(z) \qquad i = 0,1,2 \,.$$

On montre facilement que l'on a toujours

$$(4.9) \qquad \mathrm{Re}\ \xi_i'(z) > 0 \qquad i = 0,1,2$$

pour $\quad z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\}$.

Proposition 4.2

Soit

$$z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}.$$

Il existe une et une seule fonction, déterminée à une constante mutliplicative près et notée

$$u^{-\infty}(.,r,z) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$$

telle que

$$(4.11) \qquad u^{-\infty}(.,r,z) \in D^{loc}(A(\varepsilon,\mu;r))$$

$$(4.12) \qquad A(\varepsilon,\mu;r)u^{-\infty}(y,r,z) = z\, u^{-\infty}(y,r,z)$$

(4.13) $\quad u^{-\infty}(y,r,z) \in L^2((-\infty,-a];\mathbb{C}^3)$, *où* $\quad a > 0$

pour a suffisamment grand.

Démonstration

En fait, la démonstration se fait par le calcul; il suffit de tenir compte de la proposition 2.9 et en particulier des conditions (2.79) et (2.80). Donnons seulement le résultat car le calcul est ici très analogue à ceux faits dans le chapitre 3. Evidemment $u^{-\infty}(y,r,z)$ est déterminé à une constante multiplicative près; on a

$$(4.14) \qquad u^{-\infty}(y,r,z) = \begin{pmatrix} u_1^{-\infty}(y,r,z) \\ \\ u_2^{-\infty}(y,r,z) \\ \\ u_3^{-\infty}(y,r,z) \end{pmatrix}$$

avec

$$(4.15) \qquad u_1^{-\infty}(y,r,z) = \begin{cases} e^{\xi_0'(z)y} \;, & y \le 0 \\[2ex] \mathrm{ch}\ \xi_1'(z)y + \dfrac{\mu_1}{\mu_0}\dfrac{\xi_0'(z)}{\xi_1'(z)}\ \mathrm{sh}\ \xi_1'(z)y \quad, & 0 \le y \le h \\[2ex] \mathrm{ch}\ \xi_1'(z)h\ \mathrm{ch}\ \xi_2'(z)(y-h) & \\ + \dfrac{\mu_2}{\mu_0}\dfrac{\xi_0'(z)}{\xi_2'(z)}\ \mathrm{ch}\ \xi_1'(z)h\ \mathrm{sh}\ \xi_2'(z)(y-h) & \\ + \dfrac{\mu_1}{\mu_0}\dfrac{\xi_0'(z)}{\xi_1'(z)}\ \mathrm{sh}\ \xi_1'(z)h\ \mathrm{ch}\ \xi_2'(z)(y-h) & \\ + \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{\xi_1'(z)}{\xi_2'(z)}\ \mathrm{sh}\ \xi_1'(z)h\ \mathrm{sh}\ \xi_2'(z)(y-h) \quad, & y \ge h \end{cases}$$

$$(4.16)\qquad u_2^{-\infty}(y,r,z) = \begin{cases} \dfrac{i\,\xi_0'(z)}{z\,\mu_0}\, e^{\xi_0'(z)y}\,, & y \le 0 \\[2ex] \dfrac{i}{z}\left(\dfrac{\xi_1'(z)}{\mu_1}\,\mathrm{sh}\,\xi_1'(z)y + \dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\,\mathrm{ch}\,\xi_1'(z)y\right), & 0 \le y \le h \\[2ex] \dfrac{i}{z}\left(\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\mathrm{ch}\,\xi_1'(z)h\,\mathrm{sh}\xi_2'(z)(y-h)\right. & \\ \quad + \dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\,\mathrm{ch}\,\xi_1'(z)h\,\mathrm{ch}\,\xi_2'(z)(y-h) & \\ \quad + \left(\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\right)\left(\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\right)\left(\dfrac{\mu_1}{\xi_1'(z)}\right)\mathrm{sh}\,\xi_1'(z)h\,\mathrm{sh}\,\xi_2'(z)(y-h) & \\ \quad \left. + \left(\dfrac{\xi_1'(z)}{\mu_1}\right)\mathrm{sh}\,\xi_1'(z)h\,\mathrm{ch}\,\xi_2'(z)(y-h)\right), \text{ pour} & y \ge h \end{cases}$$

$$(4.17)\qquad u_3^{-\infty}(y,r,z) = \frac{r}{z}\,\frac{1}{\mu(y)}\,u_1^{-\infty}(y,r,z) \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R}-(\{0\}\cup\{h\})\,. \qquad \square$$

Proposition 4.3

Soit $z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty) - \{0\}$. *Il existe alors une et une seule fonction, déterminée à une constante multiplicative près, et notée*

$$u^{\infty}(.,r,z) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$$

telle que

$$(4.18)\qquad u^{\infty}(.,r,z) \in D^{\mathrm{loc}}(A(\varepsilon,\mu;r))$$

$$(4.19)\qquad A(\varepsilon,\mu;r)\,u^{\infty}(y,r,z) = z\,u^{\infty}(y,r,z)$$

$$(4.20)\qquad u^{\infty}(y,r,z) \in L^2([a,\infty),\mathbb{C}^3) \ \textit{où} \quad a > 0$$

pour a *suffisamment grand.*

Démonstration

La démonstration est strictement analogue à celle de la proposition 4.2 et se fait par le calcul. De même ici la solution $u^\infty(y,r,z)$ est déterminée à une constante multiplicative près. On a

$$(4.21) \qquad u^\infty(y,r,z) = \begin{pmatrix} u_1^\infty(y,r,z) \\ u_2^\infty(y,r,z) \\ u_3^\infty(y,r,z) \end{pmatrix}$$

avec

$$(4.22) \qquad u_1^\infty(y,r,z) = \begin{cases} e^{-\xi_2'(z)h} \{(\mathrm{ch}\ \xi_1'(z)h + \dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \dfrac{\mu_1}{\xi_1'(z)} \mathrm{sh}\ \xi_1'(z)h)\mathrm{ch}\ \xi_0'(z)y \\ \quad - \dfrac{\mu_0}{\xi_0'(z)} (\dfrac{\xi_1'(z)}{\mu_1} \mathrm{sh}\ \xi_1'(z)h + \dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \mathrm{ch}\ \xi_1'(z)h)\mathrm{sh}\ \xi_0'(z)y & \text{pour } y \le 0 \\ e^{-\xi_2'(z)h} (\mathrm{ch}\ \xi_1'(z)(y-h) - \dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \dfrac{\mu_1}{\xi_1'(z)} \mathrm{sh}\ \xi_1'(z)(y-h)) & \text{pour } 0 \le y \le h \\ e^{-\xi_2'(z)y} & \text{pour } y \ge h \end{cases}$$

$$(4.23) \qquad u_2^\infty(y,r,z) = \begin{cases} \frac{i}{z} e^{-\xi_2'(z)h} \{ \frac{\xi_0'(z)}{\mu_0} (\text{ch } \xi_1'(z)h + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_1'(z)} \text{ sh } \xi_1'(z)h) \\ \qquad \text{sh } \xi_0'(z)y - (\frac{\xi_1'(z)}{\mu_1} \text{ sh } \xi_1'(z)h + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \text{ ch } \xi_1'(z)h) \\ \qquad \text{ch } \xi_0'(z)y\} & \text{pour } \; y \leq 0 \\ \frac{i}{z} e^{-\xi_2'(z)h} (\frac{\xi_1'(z)}{\mu_1} \text{ sh } \xi_1'(z)(y-h) - \\ \qquad \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \text{ ch } \xi_1'(z)(y-h)) & \text{pour } \; 0 \leq y \leq h \\ -\frac{i}{z} \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2} e^{-\xi_2'(z)y} & \text{pour } \; y \geq h \end{cases}$$

$$(4.24) \qquad u_3^\infty(y,r,z) = \frac{r}{z} \frac{1}{\mu(y)} u_1^\infty(y,r,z) \quad \text{pour} \quad y \in \mathbb{R} - (\{0\} \cup \{h\}) \; . \qquad \square$$

Définition 4.4

Soient $u(.,r,z)$ *et* $v(.,r,z)$ *deux fonctions telles que, pour tout* $z \in \mathbb{C}$,

i) $u(.,r,z)$ *et* $v(.,r,z)$ *appartiennent à* $D^{loc}(A(\varepsilon,\mu;r))$

ii) $A(\varepsilon,\mu;r)u(y,r,z) = z\, u(y,r,z)$

$A(\varepsilon,\mu;r)v(y,r,z) = z\, v(y,r,z)$

pour tout $y \in \mathbb{R} - (\{h\} \cup \{0\})$.

On pose alors

$$(4.25) \qquad W(u,v)(y) = u_1(y,r,z)v_2(y,r,z) - u_2(y,r,z)v_1(y,r,z) \; .$$

On vérifie immédiatement que comme conséquence de ii) de la définition 4.4, on a :

(4.26) $\quad (\frac{d}{dy} W(u,v))(y) = 0$.

Par suite $W(u,v)$ est alors une constante.

Remarque

Montrons maintenant que, si $u(.,r,z)$ et $v(.,r,z)$ vérifient les conditions i) et ii) de la définition 4.4, et *si on a*

(4.26i) $\quad W(u,v) = 0$

alors $u(.,r,z)$ *et* $v(.,r,z)$ *sont deux solutions linéairement dépendantes.*

En particulier de 4.26i), on déduit immédiatement que l'on a

(4.26ii) $\quad u_1(\frac{h}{2},r,z)v_2(\frac{h}{2},r,z) - u_2(\frac{h}{2},r,z)v_1(\frac{h}{2},r,z) = 0$.

Il résulte alors de 4.26ii) que le système suivant

(4.26iii) $\quad \begin{cases} c_1 u_1(\frac{h}{2},r,z) + c_2 v_1(\frac{h}{2},r,z) = 0 \\ c_1 u_2(\frac{h}{2},r,z) + c_2 v_2(\frac{h}{2},r,z) = 0 \end{cases}$

possède une solution non triviale (c_1,c_2) .

Posons

(4.26iv) $\quad \omega(y,r,z) = c_1\ u(y,r,z) + c_2\ v(y,r,z)$.

Il résulte de la condition ii) de la définition 4.4 que les composantes $\omega_1(.,r,z)$ et $\omega_2(.,r,z)$ de $\omega(.,r,z)$ vérifient le système différentiel du premier ordre suivant :

(4.26v) $\quad \begin{cases} \frac{d\omega_1}{dy}(y,r,z) = -\ iz\ \mu(y)\ \omega_2(y,r,z) \\ \frac{d\omega_2}{dy}(y,r,z) = -iz(\frac{r}{\mu(y)} - \varepsilon(y))\ \omega_1(y,r,z) \end{cases}$

pour tout $y \in \mathbb{R} - (\{h\} \cup \{0\})$ avec la condition de Cauchy

(4.26vi) $\omega_1(\frac{h}{2},r,z) = \omega_2(\frac{h}{2},r,z)$.

Alors, compte tenu du théorème classique de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour des systèmes de type (4.26v) (cf. [9], note en bas de la page 67) et de (4.26vi) que l'on doit avoir

$$\text{(4.26vii)} \quad \begin{aligned} \omega_1(y,r,z) &= 0 \\ \omega_2(y,r,z) &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$, compte tenu des conditions (2.79) et (2.80). De plus, comme

$$\text{(4.26viii)} \qquad r\ \omega_1(y,r,z) = z\ \mu(y)\ \omega_3(y,r,z)$$

on doit aussi avoir

$$\text{(4.26ix)} \qquad \omega_3(y,r,z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R} .$$

Il résulte de (4.26vii) et de (4.26vix) que l'on a

$$\text{(4.26x)} \qquad \omega(y,r,z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R} .$$

Par suite, $u(.,r,z)$ et $v(.,r,z)$ sont bien linéairement dépendantes. En particulier, nous avons la propriété suivante :

Proposition 4.5

Soient $u^{\infty}(.,r,z)$ *et* $u^{-\infty}(.,r,z)$ *les deux fonctions définies respectivement par (4.14)-(4.17) et (4.21)-(4.24), pour* $r > 0$ *et*

$z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$

(4.27) $$W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z)) =$$

$$\frac{i}{z}\, e^{-\xi_2'(z)h}\, \{(\frac{\xi_0'(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2})\text{ch}\, \xi_1'(z)h +$$

$$(\frac{\xi_1'(z)}{\mu_1} + \frac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\, \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\, \frac{\mu_1}{\xi_1'(z)})\ \text{sh}\ \xi_1'(z)h\}$$

De plus $W(u^{\infty}(.,r,z),\ u^{-\infty}(.,r,z)) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$.

Démonstration

En vertu de (4.12) et de (4.19), $W(u^{\infty},u^{-\infty})$ est une constante indépendante de y; il suffit donc pour la calculer de se placer dans la région $y > h$ ou $y < 0$, ce qui donne immédiatement l'expression (4.27).

Pour démontrer la dernière assertion de la proposition, il suffit de remarquer que les deux solutions $u^{\infty}(.,r,z)$ et $u^{-\infty}(.,r,z)$ sont linéairement indépendantes. En effet, si $u^{\infty}(.,r,z)$ et $u^{-\infty}(.,r,z)$ étaient linéairement dépendantes, il résulterait des propositions 4.2 et 4.3 que $u^{\infty}(.,r,z)$ serait une fonction propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$ pour la valeur propre z; si $\text{Im}\, z \neq 0$, c'est impossible puisque l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$ est autoadjoint et si $z \in \mathbb{R} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$, c'est impossible en vertu des résultats obtenus pour le spectre ponctuel de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu;r)$ au chapitre 3. Par suite, $u^{\infty}(.,r,z)$ et $u^{-\infty}(.,r,z)$ sont bien linéairement indépendantes pour tout $z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$ et il résulte alors de la remarque qui suit la définition 4.4 que $W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z)) \neq 0$ pour de tels z. $\square$

Remarquons qu'il résulte de (4.8), (4.14)-(4.17), (4.21)-(4.24) et de (4.27), que l'on a

$$\overline{u_1^{\pm\infty}(y,r,\bar{z})} = u_1^{\pm\infty}(y,r,z) \tag{4.28}$$

$$\overline{u_2^{\pm\infty}(y,r,\bar{z})} = - u_2^{\pm\infty}(y,r,z) \tag{4.29}$$

$$\overline{u_3^{\pm\infty}(y,r,\bar{z})} = u_3^{\pm\infty}(y,r,z) \tag{4.30}$$

$$W(\overline{u^{\infty}(.,r,\bar{z})} , \overline{u^{-\infty}(.,r,\bar{z})}) = -W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z)) . \tag{4.31}$$

Définition 4.6

On définit maintenant les noyaux matriciels 3×3 *suivants :*

$$G^{(1)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = (G_{i,j}^{(1)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z))_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}} \tag{4.32}$$

i *est l'indice de ligne et* j *l'indice de colonne avec*

$$G_{i,j}^{(1)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = \frac{i}{W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z))} u_i^{\infty}(y,r,z) \overline{u_j^{-\infty}(y',r,\bar{z})} \tag{4.33}$$

$$G^{(2)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = (G_{i,j}^{(2)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z))_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}} \tag{4.34}$$

avec

$$G_{i,j}^{(2)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = \frac{i}{W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z))} u_i^{-\infty}(y,r,z)\overline{u_j^{\infty}(y',r,\bar{z})} \tag{4.35}$$

Finalement, on pose

$$G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = G^{(1)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) \quad \text{si} \quad y' < y \tag{4.36}$$

et

et

(4.37) $\quad G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = G^{(2)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) \quad \text{si} \quad y < y'$

ou encore

(4.38) $\quad G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = G^{(1)}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)Y(y-y') + G^{(2)}(\varepsilon,\mu,r;y,y'z)Y(y'-y)$

où $Y(.)$ *est la fonction d'Heaviside.*

La proposition suivante montre que le noyau matriciel $G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)$ engendre un opérateur borné dans l'espace de Hilbert $H(\varepsilon,\mu;r)$.

Proposition 4.7

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$, *l'opérateur intégral associé au noyau* $G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)$ *est un opérateur borné dans l'espace de Hilbert* $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$. *Plus précisément, la fonction suivante*

$$(4.39) \qquad (G(\varepsilon,\mu,r,z)u)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) \begin{pmatrix} \varepsilon(y')u_1(y') \\ \mu(y')u_2(y') \\ \mu(y')u_3(y') \end{pmatrix} dy'$$

appartient à $H(\varepsilon,\mu,r)$ *pour tout* $u \in H(\varepsilon,\mu,r)$ *et l'application*

(4.40) $\quad u(.) \to (G(\varepsilon,\mu,r,z)u)(.)$

est un opérateur borné de $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ *dans lui-même.*

<u>Démonstration</u>

En vertu des définitions (4.32)-(4.38), on voit immédiatement que l'on a :

$$(4.41)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\begin{Bmatrix}\varepsilon(y')u_1(y')\\ \mu(y')u_2(y')\\ \mu(y')u_3(y')\end{Bmatrix} dy'$$

$$= \frac{-i}{W(u^{\infty},u^{-\infty})}\, u^{\infty}(y,r,z) \int_{-\infty}^{y} ((\overline{u^{-\infty}(y';r;\bar z)},\bar u))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}\, dy'$$

$$- \frac{i}{W(u^{\infty},u^{-\infty})}\, u^{-\infty}(y,r,z) \int_{y}^{\infty} ((\overline{u^{\infty}(y',r,\bar z)},\bar u))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}\, dy' .$$

Il résulte des propositions 4.2 et 4.3 et de (4.41) que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction

$$(4.42)\qquad y' \to G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\begin{Bmatrix}\varepsilon(y')u_1(y')\\ \mu(y')u_2(y')\\ \mu(y')u_3(y')\end{Bmatrix}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour démontrer le reste de la proposition, remarquons tout d'abord que comme conséquence d'inégalités du type (2.37), il suffit de démontrer que l'application (4.40) définit un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^3)$ dans lui-même. Or, en vertu d'un résultat bien connu de Carlemann-Friedrichs (cf. K.O. Friedrichs [8, p.87]), il suffit pour cela de montrer que

$$(4.43)\qquad M = \sup\Big(\sup_{y\in\mathbb{R}} \int \|G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\|dy',\ \sup_{y'\in\mathbb{R}} \int \|G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\|dy\Big)<\infty$$

où

$$(4.44)\qquad \|G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\| = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} |G_{i,j}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)| .$$

De plus

(4.45) $\quad ||G(\varepsilon,\mu,r,z)|| \leq M < \infty$.

Notons C toute constante indépendante de y et de y' mais qui peut dépendre de ε,μ,r,z,i et j.

Il résulte alors de (4.14)-(4.17) et de (4.21)-(4.24) que l'on a les estimations suivantes :

(4.46) $\quad |u_i^{\pm\infty}(y,r,z)| \leq C \quad$ pour $\quad y \in [0,k]$

(4.47) $\quad |u_i^{\infty}(y,r,z)| \leq C(e^{-\mathrm{Re}\xi_0'(z)y} + e^{\mathrm{Re}\xi_0'(z)y})$, pour $y \leq 0$

(4.48) $\quad |u_i^{\infty}(y,r,z)| \leq C\, e^{-\mathrm{Re}\xi_2'(z)y}$, pour $y \geq h$

(4.49) $\quad |u_i^{-\infty}(y,r,z)| \leq C\, e^{\mathrm{Re}\xi_0'(z)y}$, pour $y \leq 0$

(4.50) $\quad |u_i^{-\infty}(y,r,z)| \leq C\,(e^{-\mathrm{Re}\xi_2'(z)y} + e^{\mathrm{Re}\xi_2'(z)y})$, pour $y \geq h$.

De (4.32), (4.33), (4.35) et (4.38) on déduit que

(4.51) $$|G_{ij}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)| \leq C(|u_i^{\infty}(y,r,z)|\ |u_j^{-\infty}(y',r;z)|Y(y-y') + |u_i^{-\infty}(y,r,z)|\ |u_j^{\infty}(y',r,z)|Y(y'-y)) .$$

Pour obtenir (4.51), nous avons aussi utilisé le fait que $W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z)) \neq 0$, ce qui a été énoncé et démontré dans la proposition 4.5. On déduit immédiatement de (4.46)-(4.51) que l'on a :

(4.52) $\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |G_{ij}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)|dy' \leq C < \infty$

(4.53) $\sup_{y'\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |G_{ij}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)|dy \leq C < \infty$

On déduit alors immédiatement de (4.52), (4.53) et (4.44) que (4.43) est vérifiée. □

Nous sommes en mesure maintenant d'énoncer le théorème essentiel de ce chapitre.

Notons $\sigma(A(\varepsilon,\mu,r))$ le spectre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$ et

(4.54) $R(\varepsilon,\mu,r;z) = (A(\varepsilon,\mu,r)-zI)^{-1} \quad , \quad z \notin \sigma(A(\varepsilon,\mu,r))$

la résolvante de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$.

Définissons le projecteur hermitien P_3 de $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ dans lui-même suivant :

(4.55) $(P_3u)(y) = P_3 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (y) = u_3(y) \quad$, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$

et tout $u \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.8

On a, pour tout $z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$,

(4.56) $(R(\varepsilon,\mu,r;z)u)(y) = (G(\varepsilon,\mu,r;z)u)(y) - \frac{1}{z}\,(P_3u)(y)$

pour tout $u(.) \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$.

La démonstration repose sur la proposition 4.7 et sur les deux propositions qui suivent.

Proposition 4.9

On a

$$(4.57)\qquad G(\varepsilon,\mu,r,\bar{z})^* = G(\varepsilon,\mu,r,z)$$

pour tout

$$z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}.$$

<u>Démonstration</u>

De (4.39), on déduit que

$$(4.58)\qquad (G(\varepsilon,\mu,r,\bar{z})^* u)(y) = \int_{\mathbb{R}} G(\varepsilon,\mu,r;y',y,\bar{z})^* \begin{pmatrix} \varepsilon(y')u_1(y') \\ \mu(y')u_2(y') \\ \mu(y')u_3(y') \end{pmatrix} dy' .$$

De plus, compte tenu de (4.33), (4.35) et (4.38), on a

$$(G(\varepsilon,\mu,r;y',y,\bar{z})^*)_{i,j} = \overline{G_{j,i}(\varepsilon,\mu,r;y',y,\bar{z})}$$

$$= \overline{G^{(1)}_{j,i}(\varepsilon,\mu,r;y',y,\bar{z})}\ Y(y'-y) + \overline{G^{(2)}_{j,i}(\varepsilon,\mu,r;y',y,\bar{z})}\ Y(y-y')$$

$$(4.59)\qquad = \frac{i}{\overline{W(u^{\infty}(.,r,\bar{z}),u^{-\infty}(.,r,\bar{z})}}\ (\overline{u_j^{\infty}(y',r,\bar{z})}u_i^{-\infty}(y,r,z)Y(y'-y) +$$

$$+ \overline{u_j^{-\infty}(y',r,\bar{z})}u_i^{\infty}(y,r,z)Y(y-y')) .$$

Or, il résulte immédiatement de (4.8) et de (4.27) que l'on a

(4.60) $\qquad \overline{W(u^{\infty}(.,r,\bar{z}),u^{-\infty}(.,r,\bar{z}))} = -W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z))$.

Par suite de (4.33), (4.35), (4.38), (4.59) et (4.60) on déduit immédiatement que

(4.61) $\qquad (G(\varepsilon,\mu,r;y',y,\bar{z})^{*})_{i,j} = G_{i,j}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)$

pour tout i et tout j. □

Dans ce qui suit, toute dérivation est toujours comprise au sens des distributions.

Proposition 4.10

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$ *et pour tout* $u \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$, *on a*

(4.62) $\qquad G(\varepsilon,\mu,z)u - \frac{1}{z} P_3\, u \in D(A(\varepsilon,\mu,r))$

et

(4.63) $\qquad (A(\varepsilon,\mu,r) - zI)(G(\varepsilon,\mu,z)u - \frac{1}{z} P_3 u) = u$.

Démonstration

La démonstration se fait par le calcul. Soit $u \in H(\varepsilon,\mu,r)$. Rappelant la définition (2.10) de $D(A(\varepsilon,\mu,r))$ et compte tenu de (4.39) et (4.55), on voit que pour démontrer (4.62) et (4.63), il suffit de montrer que l'on a pour presque tout $y \in \mathbb{R}$:

$$(4.64)\left\{ \begin{pmatrix} 0 & i\frac{d}{dy} & r \\ i\frac{d}{dy} & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z\,\varepsilon(y) & 0 & 0 \\ 0 & z\,\mu(y) & 0 \\ 0 & 0 & z\,\mu(y) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left[\int_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{matrix} G_{1,1}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y')+G_{1,2}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\mu(y')u_2(y') \\ +G_{1,3}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\mu(y')u_3(y') \\ G_{2,1}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y')+G_{2,2}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\mu(y')u_2(y') \\ +G_{2,3}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\mu(y')u_3(y') \\ G_{3,1}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y')+G_{3,2}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\mu(y')u_2(y') \\ +G_{3,3}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)\mu(y')u_3(y') \end{matrix} \right\} dy \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ u_3(y) \end{matrix} \right\} \right] - \left\{ \begin{matrix} \varepsilon(y)\; u_1(y) \\ \mu(y)\; u_2(y) \\ \mu(y)\; u_3(y) \end{matrix} \right\}$$

Rappellons que l'opérateur $i\frac{d}{dy}$ est compris au sens des distributions.

Posons dorénavant pour simplifier l'écriture

$$(4.65) \quad G_{i,j}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = G_{i,j}(y,y',z)$$

pour tout $i = 1,2,3$ et tout $j = 1,2,3$.

Soit maintenant

$$\phi(y) = \begin{pmatrix} \phi_1(y) \\ \phi_2(y) \\ \phi_3(y) \end{pmatrix} \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^3) .$$

Pour démontrer (4.64), il suffit alors de démontrer que l'on a pour tout $\phi(.) \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^3)$:

$$(4.66)\quad \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon(y)u_1(y)\phi_1(y)+\mu(y)u_2(y)\phi_2(y)+\mu(y)u_3(y)\phi_3(y)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\mu(y)u_3(y)\phi_3(y) - \frac{r}{z}\, u_3(y)\phi_1(y)dy +$$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_1(y)\ (\int_{\mathbb{R}} \{\, r(G_{3,1}(y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y')+G_{3,2}(y,y',z)\mu(y')u_2(y')$$

$$+ G_{3,3}(y,y',z)\mu(y')u_3(y')) - z\ \varepsilon(y)(G_{1,1}(y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y')$$

$$+ G_{1,2}(y,y',z)\mu(y')u_2(y') + G_{1,3}(y,y',z)\mu(y')u_3(y'))\}dy')dy -$$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_2(y)\ (\int_{\mathbb{R}} z\ \mu(y)(G_{2,1}(y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y')+G_{2,2}(y,y',z)\mu(y')u_2(y')$$

$$+ G_{2,3}(y,y',z)\mu(y')u_3(y'))dy')dy +$$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_3(y)\ (\int_{\mathbb{R}} \{\, r(G_{1,1}(y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y')+G_{1,2}(y,y',z)\mu(y')u_2(y')$$

$$+G_{1,3}(y,y',z)\mu(y')u_3(y')) - z\ \mu(y)(G_{3,1}(y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y')$$

$$+ G_{3,2}(y,y',z)\mu(y')u_2(y') + G_{3,3}(y,y',z)\mu(y')u_3(y'))\}dy')dy -$$

$$i\int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_1}{dy}(y)\ (\int_{\mathbb{R}} (G_{2,1}(y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y') + G_{2,2}(y,y',z)\mu(y')u_2(y')$$

$$+ G_{2,3}(y,y',z)\mu(y')u_3(y'))dy')dy -$$

$$i\int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_2}{dy}(y)\ (\int_{\mathbb{R}} (G_{1,1}(y,y',z)\varepsilon(y')u_1(y') + G_{1,2}(y,y',z)\mu(y')u_2(y')$$

$$+ G_{1,3}(y,y',z)\mu(y')u_3(y'))dy')dy\ .$$

A l'aide des estimations (4.46)-(4.51), on montre facilement que l'on a, par exemple,

$$(4.67)\quad \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\phi_1(y)}{dy}\right| \left(\int_{\mathbb{R}} |G_{2,1}(y,y',z)|\ |\varepsilon(y')|\ |u_1(y')|dy'\right)dy$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\phi_1(y)}{dy}\right|\ |u_2^{\infty}(y,r,z)| \left(\int_{-\infty}^{y} |u_1^{-\infty}(y',r,z)|\ |\varepsilon(y')|\ |u_1(y')|dy'\right)dy$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\phi_1(y)}{dy}\right|\ |u_2^{-\infty}(y,r,z)| \left(\int_{y}^{\infty} |u_1^{\infty}(y',r,z)|\ |\varepsilon(y')|\ |u_1(y')|dy'\right)dy$$

$$< \infty .$$

Des estimations analogues sont évidemment valables pour chacun des termes du membre de droite de (4.66) et on peut donc appliquer le théorème de Fubini à chacun de ces termes.

En dérivant au sens des distributions, compte tenu de (4.28)-(4.31) et en utilisant les expressions (4.32)-(4.38), on trouve que l'on a les égalités successives suivantes pour presque tout $y' \in \mathbb{R}$:

$$(4.68)\quad \int_{\mathbb{R}} -i\,\frac{d\phi_1}{dy}(y)\ G_{2,1}(y,y',z)dy = \phi_1(y')$$

$$+ \frac{u_1^{\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{-\infty}^{y'} \frac{du_2^{-\infty}}{dy}(y,r,z)\phi_1(y)dy$$

$$+ \frac{u_1^{-\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{y'}^{\infty} \frac{du_2^{\infty}}{dy}(y,r,z)\phi_1(y)dy$$

$$(4.69)\qquad \int_{\mathbb{R}} -\, i\, \frac{d\phi_1}{dy}(y)\; G_{2,2}(y,y',z)dy =$$

$$-\, \frac{u_2^{\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{-\infty}^{y'} \frac{du_2^{-\infty}}{dy}(y,r,z)\; \phi_1(y)dy$$

$$-\, \frac{u_2^{\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{-\infty}^{y'} \frac{du_2^{\infty}}{dy}(y,r,z)\; \phi_1(y)dy \quad .$$

$$(4.70)\qquad \int_{\mathbb{R}} -i\, \frac{d\phi_1}{dy}(y)\; G_{2,3}(y,y',z)dy = \frac{r}{z\mu(y')}\quad \phi_1(y')$$

$$+\, \frac{u_3^{\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{-\infty}^{y'} \frac{du_2^{-\infty}}{dy}(y,r,z)\; \phi_1(y)dy$$

$$+\, \frac{u_3^{-\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{y'}^{\infty} \frac{du_2^{\infty}}{dy}(y,r,z)\; \phi_1(y)dy \quad .$$

$$(4.71)\qquad \int_{\mathbb{R}} -\, i\, \frac{d\phi_2}{dy}(y)\; G_{1,1}(y,y',z)dy =$$

$$+\, \frac{u_1^{\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{-\infty}^{y'} \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,z)\; \phi_2(y)dy$$

$$+\, \frac{u_1^{-\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{y'}^{\infty} \frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,z)\; \phi_2(y)dy \; .$$

$$(4.72)\qquad \int_{\mathbb{R}} -\, i\, \frac{d\phi_2}{dy}(y)\; G_{1,2}(y,y',z)dy = \phi_2(y')$$

$$-\, \frac{u_2^{\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{-\infty}^{y'} \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,z)\; \phi_2(y)dy$$

$$-\, \frac{u_2^{-\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})} \int_{y'}^{\infty} \frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,z)\; \phi_2(y)dy \; .$$

$$(4.73)\qquad \int_{\mathbb{R}} -i\,\frac{d\phi_2}{dy}(y)\;G_{1,3}(y,y',z)\,dy =$$

$$+\;\frac{u_3^{\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})}\int_{-\infty}^{y'}\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,z)\;\phi_2(y)\,dy$$

$$+\;\frac{u_3^{-\infty}(y',r,z)}{W(u^{\infty},u^{-\infty})}\int_{y'}^{\infty}\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,z)\;\phi_2(y)\,dy\quad .$$

Dans chacune des expressions (4.68)-(4.73), $\frac{du_i^{\pm\infty}}{dy}$ (i=1,2) est la dérivée ordinaire de chacune des fonctions $u_i^{\pm\infty}$ (i=1,2), cette dérivée est définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ sauf pour $y = 0$ et $y = h$.

En particulier, il résulte des propositions 4.2 et 4.3 que l'on a, pour tout $y \in \mathbb{R} -(\{0\}\cup\{h\})$

$$(4.74)\qquad \left\{\begin{array}{l} i\,\frac{du_2^{\pm\infty}}{dy}(y) + r\,u_3^{\pm\infty}(y) - z\,\varepsilon(y)\,u_1^{\pm\infty}(y) = 0 \\ i\,\frac{du_1^{\pm\infty}}{dy}(y) - z\,\mu(y)\,u_2^{\pm\infty}(y) = 0 \\ r\,u_1^{\pm\infty}(y) - z\,\mu(y)\,u_3^{\pm\infty} = 0 \end{array}\right.\qquad y \in \mathbb{R} -(\{0\}\cup\{h\})$$

Maintenant, pour évaluer le membre de droite de (4.66), on applique le théorème de Fubini pour échanger l'intégration sur y avec celle sur y', on substitue chacune des égalités (4.68)-(4.73) et enfin, on utilise les égalités (4.74).

On montre alors que chacun des termes comportant les expressions "$\phi_1(y)u_2(y')$, $\phi_1(y)u_3(y')$, $\phi_2(y)u_3(y')$, $\phi_3(y)u_1(y')$, $\phi_2(y)u_1(y')$, $\phi_3(y)u_2(y')$" s'annulle. Il ne reste plus que les termes diagonaux comportant les expressions "$\phi_1(y)u_1(y')$, $\phi_2(y)u_2(y')$ et $\phi_3(y)u_3(y')$". Lorsqu'on leur applique le même procédé de calcul que celui utilisé pour les termes non diagonaux, on montre alors facilement que le membre de droite de (4.66) est bien égal au membre de gauche.

Aussi, l'égalité (4.66) est démontrée pour tout $\phi(.) \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^3)$ et pour tout $u \in H(\varepsilon,\mu,r)$.

Par suite, l'égalité (4.64) est vérifiée. Après l'avoir multipliée à gauche par la matrice

$$(4.75)\qquad \begin{pmatrix} \varepsilon(y)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu(y)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mu(y)^{-1} \end{pmatrix}$$

qui est définie pour tout $y \in \mathbb{R} -(\{0\}\cup\{h\})$, elle montre bien que (4.62) est vérifiée puisque alors, le membre de droite appartient à l'espace $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$.

En multipliant (4.64) à gauche par la matrice (4.75), on n'obtient rien d'autre que l'égalité (4.63). □

Démonstration du théorème 4.8

Il résulte de la proposition 4.7 et de (4.55) que, pour tout $z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$, l'opérateur

$$(4.76)\qquad u \to G(\varepsilon,\mu,r,z)u - \frac{1}{z} P_3\, u \quad , \quad u \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$$

est borné dans $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$.

L'égalité (4.63) montre que l'opérateur (4.76) est un inverse borné à droite de l'opérateur fermé $A(\varepsilon,\mu,r) - zI$.

Maintenant, si $z \in \mathbb{C} - \bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$, alors

$\bar{z} \in \mathbb{C} - \bigcup\limits_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\} - \{0\}$; par suite, on a aussi

$$(4.77) \qquad (A(\varepsilon,\mu,r) - \bar{z}I)\ (G(\varepsilon,\mu,r,\bar{z}) - \frac{1}{z} P_3) = I \ .$$

Maintenant, en considérant l'équation adjointe de (4.77), on obtient, compte tenu du fait que l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$ est autoadjoint

$$(4.78) \qquad (G(\varepsilon,\mu,r,z)^* - \frac{1}{z} P_3)\ (A(\varepsilon,\mu,r) - zI) \subset I \ .$$

Le domaine de définition de l'opérateur $(G(\varepsilon,\mu,r,\bar{z})^* - \frac{1}{z} P_3)(A(\varepsilon,\mu,r)-zI)$ est évidemment $D(A(\varepsilon,\mu,r))$.

Or, de la proposition (4.9), il résulte immédiatement que l'on a

$$(4.79) \qquad (G(\varepsilon,\mu,r,z) - \frac{1}{z} P_3)\ (A(\varepsilon,\mu,r) - zI) \subseteq I \ .$$

(4.79) montre que l'opérateur borné $G(\varepsilon,\mu,r,z) - \frac{1}{z} P_3$ est un inverse à gauche de l'opérateur $(A(\varepsilon,\mu,r) - zI)$.

Par suite, si l'on note $\sigma(A(\varepsilon,\mu,r))$ le spectre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, on a :

$$(4.80) \qquad \sigma(A(\varepsilon,\mu,r)) \subset (\bigcup_{i=0}^{2} \{(-\infty,-c_i r] \cup [c_i r,\infty)\}) \cup \{0\}$$

et, par définition même de la résolvante de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, on a :

$$(4.81) \qquad R(\varepsilon,\mu,r,z) = G(\varepsilon,\mu,r,z) - \frac{1}{z} P_3 \ . \qquad \square$$

Dans le chapitre suivant, nous utiliserons le théorème 4.8 pour établir un développement en fonctions propres généralisées de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$. Il sera alors préférable d'utiliser des solutions de l'équation $A(\varepsilon,\mu,r)u = z\ u$ qui soient analytiques pour tout z dans un voisinage d'une partie du spectre de l'opérateur. Pour cela, les déterminations des fonctions $(r^2 - z^2 c_2^{-2})^{1/2}$ introduites dans la définitions 4.1 ne sont pas toujours adaptées. Il est préférable alors d'introduire les définitions suivantes :

Définition 4.11

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tels que* $z \in \mathbb{C} - (-\infty, c_i r]$ $(i=0,1,2)$, *on pose*

$$\tilde{\zeta}_i^+(z) = (z - c_i r)^{1/2} \tag{4.82}$$

la détermination étant telle que

$$\mathrm{Re}\ \tilde{\zeta}_i^+(z) > 0 \quad , \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}\ \tilde{\zeta}_i^+(z) < \frac{\pi}{2} \tag{4.83}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} - (-\infty, c_i r]$

De même, pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z \in \mathbb{C} - [-c_i r, \infty)$ $(i=0,1,2)$, *on pose*

$$\tilde{\zeta}_i^-(z) = (z + c_i r)^{1/2} \tag{4.84}$$

la détermination étant telle que

$$\mathrm{Im}\ \tilde{\zeta}_i^-(z) > 0 \quad , \quad \text{ou} \quad 0 < \mathrm{Arg}\ \tilde{\zeta}_i^-(z) < \pi \tag{4.85}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} - [-c_i r, \infty)$.

Maintenant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, *tel que* $\mathrm{Re}\ z > c_i r$ $(i=0,1,2)$, *on pose*

$$\xi_i(z) = c_i^{-1}\ \tilde{\zeta}_i^+(z)\ \zeta_i^-(z) \tag{4.86}$$

et pour tout $z \in \mathbb{C}$, *tel que* $\mathrm{Re}\ z < -c_i r$ $(i=0,1,2)$, *on pose*

$$\xi_i(z) = c_i^{-1}\ \tilde{\zeta}_i^-(z)\ \zeta_i^+(z) \tag{4.87}$$

où $\zeta_i^+(z)$ *(resp.* $\zeta_i^-(z)$*) est définie par 4.1 et 4.2 (resp. 4.3 et 4.4).*

On vérifie immédiatement que l'on a

$$(4.88)\qquad \xi_i(z) = i\ \xi_i^!(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z \in (-\infty,-c_i r) \cup (c_i r,\infty)$ et $\operatorname{Im} z > 0$, où $\xi_i^!(z)$ est défini par (4.5).

De même a-t-on

$$(4.89)\qquad \xi_i(z) = -\ i\ \xi_i^!(z)$$

pour tout $z \in C$ tel que $\operatorname{Re} z \in (-\infty,-c_i r) \cup (c_i r,\infty)$ et $\operatorname{Im} z < 0$.

Par suite, il résulte de (4.8), (4.88) et (4.89) que l'on a :

$$(4.90)\qquad \overline{\xi_i(\bar{z})} = \xi_i(z)$$

pour tout $z \in C$ tel que $\operatorname{Re} z \in (-\infty,-c_i r) \cup (c_i r,\infty)$.

Maintenant considérons le type I (2.10), i.e., celui où $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$ et supposons que

$$(4.91)\qquad \begin{array}{l} c_1 r < \operatorname{Re} z < c_0 r \\ \text{ou} \\ -c_0 r < \operatorname{Re} z < -c_1 r \end{array}$$

Dans ce cas, il est nécessaire d'obtenir l'expression des solutions $u^{\pm\infty}(y,r,z)$ en fonction de $\xi_1(z)$ au lieu de $\xi_1^!(z)$. On a :

$$(4.92)\qquad u^{-\infty}(y,r,z) = \begin{pmatrix} u_1^{-\infty}(y,r,z) \\ u_2^{-\infty}(y,r,z) \\ u_3^{-\infty}(y,r,z) \end{pmatrix}$$

avec

$$
(4.93) \quad \mu_1^{-\infty}(y,r,z) = \begin{cases}
e^{\xi_0'(z)y} \;, & y \le 0 \\[2ex]
\cos \xi_1(z)y + \dfrac{\mu_1}{\mu_0}\,\dfrac{\xi_0'(z)}{\xi_1(z)} \sin \xi_1(z)y \;, & 0 \le y \le h \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\, e^{\xi_2'(z)(y-h)} \,\dfrac{\mu_2}{\xi_2'(z)} \Big(\cos \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2} + \dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\Big) & \\[2ex]
\quad + \sin \xi_1(z)h \Big(\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\,\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)} - \dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1}\Big)\Big) & \\[2ex]
\quad - \dfrac{1}{2}\, e^{-\xi_2'(z)(y-h)} \,\dfrac{\mu_2}{\xi_2'(z)} \Big(\cos \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0} - \dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\Big) & \\[2ex]
\quad - \sin \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1} + \dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)} + \dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\Big)\Big) \;, & \\[2ex]
& y \ge h
\end{cases}
$$

$$
(4.94) \quad u_2^{-\infty}(y,r,z) = \begin{cases}
\dfrac{i}{z}\,\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\, e^{\xi_0'(z)y} \;, & y \le 0 \\[2ex]
\dfrac{i}{z}\Big(\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0} \cos \xi_1(z)y - \dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1} \sin \xi_1(z)y\Big) \;, & 0 \le y \le h \\[2ex]
\dfrac{i}{z}\,\Big(\dfrac{1}{2}\, e^{\xi_2'(z)(y-h)} \Big(\cos \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2} + \dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\Big) & \\[2ex]
\quad + \sin \xi_1(z)h \Big(\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\,\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)} - \dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1}\Big)\Big) & \\[2ex]
\quad + \dfrac{1}{2}\, e^{-\xi_2'(z)(y-h)} \Big(\cos \xi_1(z)h \Big(\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0} - \dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\Big) & \\[2ex]
\quad - \sin \xi_1(z)h \Big(\dfrac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\,\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)} + \dfrac{\xi_1(z)}{\mu_i}\Big)\Big)\Big) \;, & \\[2ex]
& y \ge h \,.
\end{cases}
$$

$$(4.95)\qquad u_3^{-\infty}(y,r,z) = \frac{r}{z}\,\frac{1}{\mu(y)}\,u_1^{-\infty}(y,r,z) \qquad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R}-(\{0\}\cup\{h\})\ .$$

De même a-t-on

$$(4.96)\qquad u^{\infty}(y,r,z) = \begin{pmatrix} u_1^{\infty}(y,r,z) \\ u_2^{\infty}(y,r,z) \\ u_3^{\infty}(y,r,z) \end{pmatrix}$$

avec

$$(4.97)\qquad u_1^{\infty}(y,r,z) = \begin{cases} e^{-\xi_2'(z)h}\Big\{\frac{1}{2}\,e^{\xi_0'(z)y}\Big(\cos\xi_1(z)h\Big(1-\frac{\mu_0}{\xi_0'(z)}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\Big) \\ \qquad + \sin\xi_1(z)h\,\Big(\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)} + \frac{\mu_0}{\xi_0'(z)}\,\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}\Big)\Big) \\ \qquad + \frac{1}{2}\,e^{-\xi_0'(z)y}\Big(\cos\xi_1(z)h\,\Big(1+\frac{\mu_0}{\xi_0'(z)}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\Big) \\ \qquad + \sin\xi_1(z)h\,\Big(\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)} - \frac{\mu_0}{\xi_0'(z)}\,\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}\Big)\Big\} & \text{pour} \quad y\le 0 \\ e^{-\xi_2'(z)h}\Big(\cos\xi_1(z)(y-h) - \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}\,\sin\xi_1(z)(y-h)\Big) & \text{pour} \quad 0\le y\le h \\ e^{-\xi_2'(z)y} & \text{pour} \quad y \ge h\ . \end{cases}$$

$$(4.98)\qquad u_2^{\infty}(y,r,z) = \begin{cases} \frac{i}{z}\, e^{-\xi_2'(z)h}\{\frac{1}{2}\, e^{\xi_0'(z)y}(\cos \xi_1(z)h(\frac{\xi_0'(z)}{\mu_0} - \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}) \\ \quad + \sin \xi_1(z)h\,(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} + \frac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)})) \\ \quad - \frac{1}{2}\, e^{-\xi_0'(z)y}\,(\cos \xi_1(z)h\,(\frac{\xi_0'(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}) \\ \quad + \sin \xi_1(z)h\,(-\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} + \frac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}))\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad y \le 0 \\ -\frac{i}{z}\, e^{-\xi_2'(z)h}\,(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}\sin \xi_1(z)(y-h) \\ \quad + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\cos \xi_1(z)(y-h)) \qquad \text{pour} \quad 0 \le y \le h \\ -\frac{i}{2}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\, e^{-\xi_2'(z)y} \qquad \text{pour} \quad y \ge h \end{cases}$$

$$(4.99)\qquad u_3^{\infty}(y,r,z) = \frac{r}{z}\,\frac{1}{\mu(y)}\, u_1^{\infty}(y,r,z) \qquad \text{pour} \quad y \in \mathbb{R} - (\{0\}\cup\{h\})\ .$$

Finalement, on a :

$$(4.100)\qquad W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z)) =$$

$$\frac{i}{z}\, e^{-\xi_2'(z)h}\{(\frac{\xi_0'(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2})\cos \xi_1(z)h$$

$$+ (\frac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)} - \frac{\xi_1(z)}{\mu_1})\sin \xi_1(z)h\}\ .$$

L'avantage des expressions (4.92)-(4.100) est que maintenant chacune des fonctions $u^{\pm\infty}(y,r,z)$ est définie pour tout $z = \lambda$ réel et tel que $c_1 r < \lambda < c_0 r$ ou $-c_0 r < \lambda < -c_1 r$. Dans ce cas aussi les fonctions $u^{\pm\infty}(.,r,\lambda)$ vérifient les propositions 4.2 et 4.3.

Remarquons maintenant que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$c_1 r < \lambda < c_0 r$$

$$- c_0 r < \lambda < -c_1 r$$

$W(u^{\infty}(.,r,\lambda),u^{-\infty}(.,r,\lambda)) = 0$ si et seulement si (3.63) est vérifiée, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \in \sigma_p(A(\varepsilon,\mu,r))$. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.12

Supposons que $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$ *soient les solutions* $u^{\pm\infty}(.,r,z)$ *données par (4.92)-(4.99). Alors, pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z \notin \sigma_p(A(\varepsilon,\mu,r))$ *et tel que* $c_1 r < \text{Re } z < c_0 r$ *, ou* $- c_0 r < \text{Re } z < -c_1 r$, z *appartient à l'ensemble résolvant de l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu,r)$ *et la résolvante* $R(\varepsilon,\mu,r;z)$ *est toujours donnée par (4.56).*

<u>Démonstration</u>

Lorsque $\text{Im } z \neq 0$, le théorème 4.12 n'est rien d'autre que le théorème 4.8. Lorsque $z = \lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \notin \sigma_p(A(\varepsilon,\mu,r))$, il suffit de remarquer que $W(u^{\infty}(.,r,\lambda),u^{-\infty}(.,r,\lambda)) \neq 0$ et que, par suite, les estimations (4.46)-(4.50) sont encore vérifiées pour $z = \lambda$. On peut alors dans ce cas répéter sans changement la démonstration du théorème 4.8, ce qui achève la démonstration du théorème 4.12. $\square$

5. DEVELOPPEMENT EN FONCTIONS PROPRES GENERALISEES DE L'OPERATEUR $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$

Nous allons utiliser les résultats des chapitres précédents et plus particulièrement ceux du chapitre 4 pour en déduire un développement en fonctions propres de l'opérateur autoadjoint $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$.

On notera indifferemment $\pi(\varepsilon,\mu,r;\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille spectrale associée à l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$ et $\pi(\varepsilon,\mu,r;\Delta)$, pour tout borélien $\Delta \subset \mathbb{R}$, la mesure spectrale associée.

Nous savons que dans chacun des cas $\{0\}$ est toujours une valeur propre de multiplicité infinie. $\pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\})$ est la projection orthogonale sur le sous espace propre associé. On peut le déterminer à partir du théorème 4.8.

5.1. Détermination du projecteur $\pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\})$, $r > 0$.

Il résulte de la proposition 3.8 et du théorème 4.8 que $\{0\}$, lorsque $r > 0$, est toujours une valeur propre isolée de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$. Il résulte alors du théorème 4.8 que l'on a :

$$(5.1.1) \quad \pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\}) = P_3 - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} G(\varepsilon,\mu,r;z)dz$$

où $G(\varepsilon,\mu,r;z)$ est donné par (4.39) et où ∂D est un cercle centré à l'origine, contenu dans l'ensemble résolvant de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r;z)$ et frontière d'un disque ouvert D lui-même centré à l'origine et contenu dans l'ensemble résolvant. Chacune des fonctions $\xi_i'(z)$ $(i=0,1,2)$ définies par (4.5) est analytique dans le voisinage D de l'origine. Il résulte alors de (4.27) que la fonction

$$(5.1.2)\quad \omega(z) = z\ W(u^{\infty}(.,r,z),u^{-\infty}(.,r,z))$$

$$= i\ e^{-\xi_2'(z)h}\ \{(\frac{\xi_0'(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2})\mathrm{ch}\ \xi_1'(z)h +$$

$$+ (\frac{\xi_1'(z)}{\mu_1} + \frac{\xi_0'(z)}{\mu_0}\ \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\ \frac{\mu_1}{\xi_1'(z)})\ \mathrm{sh}\ \xi_1'(z)h\} .$$

Il résulte de la proposition 4.5 que $\omega(z) \neq 0$ pour tout $z \in (D-\{0\}) \cup \partial D$. Mais on a aussi $\omega(0) \neq 0$; en effet, remarquons que $\xi_i'(0) = r$ pour tout i et on a $\omega(0) = 0$ si et seulement si

$$(5.1.3)\quad \mathrm{th}\ rh = - \frac{\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_2}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_0\mu_2}}$$

Or, toute solution de cette équation serait telle que $rh < 0$, mais nous avons supposé que $r > 0$; par suite (5.1.3) ne peut avoir de solution positive.

La fonction $z \to \omega(z)^{-1}$ est donc aussi analytique dans le même voisinage D de l'origine.

Il résulte finalement de (4.15) et de (4.22) que les fonctions $u_1^{\pm\infty}(y,r,z)$ sont aussi analytiques dans D pour presque tout $y \in \mathbb{R}$; de même $dy^{\pm\infty}(y,r,z)$ sont analytiques dans D pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

La norme de $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ étant équivalente à celle de $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^3)$, $C_0^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{C}^3)$ est dense dans $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$. Soit donc

$$(5.1.4)\begin{pmatrix} v_1(y) \\ v_2(y) \\ v_3(y) \end{pmatrix} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{C}^3) .$$

Il résulte de 5.1.1 et du théorème de Fubini que l'on a

$$(5.1.5) \quad (\pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\})u,v)_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})} = (P_3u,v)_{H(\varepsilon,\mu,r)}$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (G(\varepsilon,\mu,r;z)u,v)_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})} \cdot dz$$

pour tout $u \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ et tout $v \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^3)$. Il s'agit en fait de calculer $\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (G(\varepsilon,\mu,r;z)u,v)_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})} dz$.

Posons momentanément

$$(5.1.6) \quad \rho_1(y) = \varepsilon(y) \quad , \quad \rho_2(y) = \rho_3(y) = \mu(y) \; ,$$

pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

Il résulte de (4.28)-(4.38) que l'on a, en rappelant (4.65)

$$(5.1.7) \quad (G(\varepsilon,\mu,r;z)u,v)_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})} =$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int \int G_{i,j}(y,y',z)\rho_j(y')u_j(y')\rho_i(y)\overline{v_i(y)}dydy' =$$

$$i\ z\ \omega(z)^{-1} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int \int \{u_i^\infty(y,r,z)\overline{u_j^{-\infty}(y',r,\bar{z})}Y(y-y') +$$

$$u_i^{-\infty}(y,r,z)\overline{u_j^{\infty}(y',r,\bar{z})}Y(y'-y)\}\rho_j(y')u_j(y')\rho_i(y)\overline{v_i(y)}dydy' \; .$$

On déduit du théorème de Fubini que

$$(5.1.8) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} (G(\varepsilon,\mu,r;z)u,v)_{\mathcal{H}(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})} dz =$$

$$i \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int \int \rho_j(y')u_j(y')\rho_i(y)\overline{v_i(y)}$$

$$(\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} z\ \omega(z)^{-1} (u_i^{\infty}(y,r,z)\overline{u_j^{-\infty}(y',r,\overline{z})}Y(y-y')+u_i^{-\infty}(y,r,z)\overline{u_j^{\infty}(y',r,\overline{z})}$$

$$Y(y'-y))dydy' \quad .$$

Il résulte de (4.14)-(4.17) et de (4.21)-(4.24) que pour tout $i=1,2,3$ et pour presque tout y et y', la fonction

$$(5.1.9) \quad z \to z\ \omega(z)^{-1}(u_i^{\infty}(y,r,z)u_1^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y')+u_i^{-\infty}(y,r,z)u_1^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))$$

est analytique sur D.

Par suite, on a

$$(5.1.10) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} z\ \omega(z)^{-1}(u_j^{\infty}(y,r,z)u_1^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y') +$$

$$u_j^{-\infty}(y,r,z)u_1^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))dz = 0$$

pour tout $j=1,2,3$ et pour presque tous y et y'.

De même, les fonctions

$$(5.1.11) \quad z \to z\ \omega(z)^{-1}(u_1^{\infty}(y,r,z)u_2^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y') +$$

$$u_1^{-\infty}(y,r,z)u_2^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))$$

$$(5.1.12) \quad z \to z\ \omega(z)^{-1}(u_1^{\infty}(y,r,z)u_3^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y') +$$

$$u_1^{-\infty}(y,r,z)u_3^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))$$

sont des fonctions analytiques dans D pour presque tous y et y'.
Par suite, on a

(5.1.13) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} z\ \omega(z)^{-1}(u_1^{\infty}(y,r,z)u_2^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y') + u_1^{-\infty}(y,r,z)u_2^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))dz = 0$$

(5.1.14) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} z\ \omega(z)^{-1}(u_1^{\infty}(y,r,z)u_3^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y') + u_1^{-\infty}(y,r,z)u_3^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))dz = 0\ .$$

Rappelons que, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a

(5.1.15) $$u_2^{\pm\infty}(y,r,z) = \frac{1}{\mu(y)}\,\frac{i}{z}\,\frac{du_1^{\pm\infty}}{dy}(y,r,z)$$

(5.1.16) $$u_3^{\pm\infty}(y,r,z) = \frac{r}{z}\,\frac{1}{\mu(y)}\,u_1^{\pm\infty}(y,r,z)$$

et pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, les fonctions $z \to u_1^{\pm\infty}(y,r,z)$ et $z \to du_1^{\pm\infty}(y,r,z)$ sont analytiques sur D.

On a alors, d'après le théorème des résidus

(5.1.17) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} z\ \omega(z)^{-1}(u_2^{\infty}(y,r,z)u_2^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y') + u_2^{-\infty}(y,r,z)u_2^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))dz$$

$$= -\frac{1}{\mu(y)\mu(y')}\,\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}(z\ \omega(z))^{-1}\Big(\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,z)\,\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,z)Y(y-y') + \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,z)\,\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y',r,z)Y(y'-y)\Big)dz$$

$$= -\frac{\omega(0)^{-1}}{\mu(y)\mu(y')}\Big(\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,0)\,\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,0)Y(y-y') + \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,0)\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y',r,0)Y(y'-y)\Big)$$

pour presque tous y et y'. De même, a-t-on

(5.1.18) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} z\ \omega(z)^{-1}(u_3^{\infty}(y,r,z)u_2^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y')+u_3^{-\infty}(y,r,z)u_2^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))dz =$$

$$= \frac{ir}{\mu(y)\mu(y')}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} (z\omega(z))^{-1}(u_1^{\infty}(y,r,z)\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,z)Y(y-y') +$$

$$+ u_1^{-\infty}(y,r,z)\ \frac{du_1^{\infty}}{dy}(y',r,z)Y(y'-y))dz =$$

$$= \frac{ir\omega(0)^{-1}}{\mu(y)\mu(y')}\ (u_1^{\infty}(y,r,0)\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,0)Y(y-y') +$$

$$+ u_1^{-\infty}(y,r,0)\ \frac{du_1^{\infty}}{dy}(y',r,0)Y(y'-y))$$

pour presque tous y et y'. On a aussi

(5.1.19) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} z\ \omega(z)^{-1}(u_2^{\infty}(y,r,z)u_3^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y')$$

$$+ u_2^{-\infty}(y,r,z)u_3^{\infty}(y',r,z)Y(y'-y))dz$$

$$= ir\ \frac{\omega(0)^{-1}}{\mu(y)\mu(y')}(\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,0)u_1^{-\infty}(y',r,0)Y(y-y')$$

$$+ \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,0)u_1^{\infty}(y',r,0)Y(y'-y))$$

pour presque tous y et y'.

(5.1.20) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} z\ \omega(z)^{-1}(u_3^{\infty}(y,r,z)u_3^{-\infty}(y',r,z)Y(y-y')$$

$$+ u_3^{-\infty}(y,r,z)u_3^{\infty}(y',r,z)Y(y-y'))dz$$

$$= \frac{r^2\bar{\omega}(0)^{-1}}{\mu(y)\mu(y')}\ (u_1^{\infty}(y,r,0)u_1^{-\infty}(y',r,0)Y(y-y')$$

$$+ u_1^{-\infty}(y,r,0)u_1^{\infty}(y',r,0)Y(y'-y))\ .$$

Finalement, compte tenu de (5.1.6), (5.1.7),(5.1.8), (5.1.10), (5.1.13),(5.1.14), (5.1.17), (5.1.18), (5.1.19) et (5.1.20), on a :

$$(5.1.21)\quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}(G(\varepsilon,\mu,r;z)u,v)_{H(\varepsilon,\mu,r)}dz =$$

$$= \omega(0)^{-1}\{\, i\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{v_2(y)}\,(\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,0)\int_{-\infty}^{y}\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,0)u_2(y')dy'$$

$$+\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,0)\int_{y}^{\infty}\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y',r,0)u_2(y')dy')dy$$

$$-r\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{v_2(y)}\;(\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,0)\int_{-\infty}^{y}u_1^{-\infty}(y',r,0)u_3(y')dy'$$

$$+\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,0)\int_{y}^{\infty}u_1^{\infty}(y',r,0)u_3(y')dy')dy$$

$$+ r\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{v_3(y)}\;(u_1^{\infty}(y,r,0)\int_{-\infty}^{y}\frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,0)u_2(y')dy'$$

$$+ u_1^{-\infty}(y,r,0)\int_{y}^{\infty}\frac{du_1^{\infty}}{dy}(y',r,0)u_2(y')dy')dy$$

$$+ ir^2\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{v_3(y)}\;(u_1^{\infty}(y,r,0)\int_{-\infty}^{y}u_1^{-\infty}(y',r,0)u_3(y')dy'$$

$$+ u_1^{-\infty}(y,r,0)\int_{y}^{\infty}u_1^{-\infty}(y',r,0)u_3(y')dy')dy\,\}\;.$$

Remarquons que les fonctions $y \to u_1^{\pm\infty}(y,r,0)$ et $y \to \frac{du_1^{\pm\infty}}{dy}(y,r,0)$ sont à valeurs réelles.

Maintenant, compte tenu de (5.1.5) et de (5.1.21) ainsi que de la densité de $C_0^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C}^3)$ dans $H(\varepsilon,\mu,r)$, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.1

On a, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$,

(5.1.22) $\quad (\pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\})u)_1(y) = 0$

(5.1.23) $\quad (\pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\}u)_2(y) =$

$$= -i\ \omega(0)^{-1}\ \Big(\frac{1}{\mu(y)}\ \frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,0)\ \int_{-\infty}^{y} \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,0)u_2(y')dy'$$

$$+ \frac{1}{\mu(y)}\ \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,0)\ \int_{y}^{\infty} \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,0)u_2(y')dy'\Big)$$

$$+ r\ \omega(0)^{-1}\ \Big(\frac{1}{\mu(y)}\ \frac{du_1^{\infty}}{dy}(y,r,0)\ \int_{-\infty}^{y} u_1^{-\infty}(y',r,0)u_3(y')dy'$$

$$+ \frac{1}{\mu(y)}\ \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y,r,0)\ \int_{y}^{\infty} u_1^{\infty}(y',r,0)u_3(y')dy'\Big)$$

(5.1.24) $\quad (\pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\}u)_3(y) = u_3(y)$

$$- r\ \omega(0)^{-1}\ \Big(\frac{1}{\mu(y)}\ u_1^{\infty}(y,r,0)\ \int_{-\infty}^{y} \frac{du_1^{-\infty}}{dy}(y',r,0)u_2(y')dy'$$

$$+ \frac{1}{\mu(y)}\ u_1^{-\infty}(y,r,0)\ \int_{y}^{\infty} \frac{du_1^{\infty}}{dy}(y',r,0)u_2(y')dy'\Big)$$

$$- ir^2\ \omega(0)^{-1}\ \Big(\frac{1}{\mu(y)}\ u_1^{\infty}(y,r,0)\ \int_{-\infty}^{y} u_1^{-\infty}(y',r,0)u_3(y')dy'$$

$$+ \frac{1}{\mu(y)}\ u_1^{-\infty}(y,r,0)\ \int_{y}^{\infty} u_1^{\infty}(y',r,0)u_3(y')dy'\Big)\ .$$

5.2. Développement en fonctions propres et spectre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$ dans le cas où $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$

C'est le seul cas où l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$, peut avoir des valeurs propres.

Rappelons que selon les résultats du chapitre 3, aucun des points $\{c_1 r\}$, $\{c_0 r\}$ et $\{c_2 r\}$ n'est valeur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$. Par suite, on a

$$\Pi(\varepsilon,\mu,r;\{c_1 r\}) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;\{c_0 r\}) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;\{c_2 r\}) = 0 \ . \tag{5.2.1}$$

Il résulte du théorème (4.8) que les deux intervalles ouverts $(0,c_1 r)$ et $(-c_1 r,0)$ appartiennent à l'ensemble résolvant de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$.

On a donc

$$\begin{aligned}\Pi(\varepsilon,\mu,r;\mathbb{R}) = I = {} & \Pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\}) + \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_1 r,c_0 r)) \\ & + \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_0 r,-c_1 r)) + \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_0 r,c_2 r)) \\ & + \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_2 r,-c_0 r)) + \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_2 r,\infty)) \\ & + \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2 r)) \ .\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Le projecteur $\Pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\})$ a déjà été déterminé par le théorème 5.1. Pour construire une représentation spectrale de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, il suffit alors de construire une représentation spectrale de chacun des opérateurs $A(\varepsilon,\mu,r)\ \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_1 r,c_0 r))$, $A(\varepsilon,\mu,r)\ \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_0 r,-c_1 r))$, $A\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_0 r,c_2 r))$, $A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_2 r,-c_0 r))$, $A\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_2 r,\infty))$, $A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2 r))$.

On pourra alors en déduire le spectre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$ ainsi qu'un développement en fonctions propres de toute fonction $f \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$.

5.2.1. Cas de $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_1 r,c_0 r))H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) \oplus \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_0 r,-c_1 r))H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$

On sait d'après le théorème 3.9 que si $0 < r \leq r_0$, alors

$$\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_1 r,c_0 r))H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_0 r,-c_1 r))H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) = \{0\} .$$

Si $r_k < r < r_{k+1}$, $k \geq 0$, l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$ possède $k+1$ valeurs propres dans l'intervalle $(c_1 r,c_0 r)$; on a donc, dans ce cas

$$(5.2.3) \qquad \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_1 r,c_0 r)) = \sum_{j=0}^{k} \Pi(\varepsilon,\mu,r;\{\omega_j(r)\}) .$$

De même, si $r = r_k$, $k \geq 1$, l'opérateur possède k valeurs propres et on a de même, dans ce cas :

$$(5.2.4) \qquad \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_1 r,c_0 r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \Pi(\varepsilon,\mu,r;\{\omega_j(r)\}) .$$

Chaque valeur propre $\omega_j(r)$ est simple et on a, pour tout $f \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$

$$(5.2.5) \qquad (\Pi(\varepsilon,\mu,r;\{\omega_j(r)\})f)(y) = |a_j(r)|^2 (f,u^{(j)})u^{(j)}(y)$$

où $a_j(r)$ est une constante de normalisation qu'il faut déterminer. Soit D_j un disque ouvert centré au point $\{\omega_j(r)\}$ tel que $\bar{D}_i$ ne contient aucune autre valeur propre.

Il résulte alors de (5.1.1) et du théorème de Fubini que l'on a :

$$(5.2.6) \qquad (\Pi(\varepsilon,\mu,r;\{\omega_j(r)\})f,g) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_j} (G(\varepsilon,\mu,r;z)f,g)dz$$

pour tout $f \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ et pour tout $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Il faut alors utiliser (5.2.6) pour calculer la constante de normalisation $a_j(r)$.

Chacune des fonctions $z \to u_j^{\pm\infty}(y,r,z)$ est analytique dans $\{z \in \mathbb{C}; c_1 r < \mathrm{Re}\, z < c_0 r\}$ pour tout $j=1,2,3$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}$. Par suite, $\omega_j(r)$ est un pôle de $(G(\varepsilon,\mu,r;z)f,g)$ car c'est un zéro de la fonction $\omega(z)$.

Rappelons que l'on a, en vertu de (4.100) et de (5.1.2)

$$(5.2.7) \qquad \omega(z) = i\, e^{-\xi_2'(z)h} \{ (\frac{\xi_0'(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}) \cos \xi_1(z)h$$

$$+ (\frac{\xi_0'(z)}{\mu_0} \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_1(z)} - \frac{\xi_1(z)}{\mu_1} \sin \xi_1(z)h\} \quad .$$

Le lemme suivant montre que chaque valeur propre $\omega_2(r)$ est un zéro simple de la fonction $\omega(z)$.

Lemme 5.2

Chaque valeur propre $\omega_i(r)$ *est un zéro simple de la fonction* $z \to \omega(z)$ *ou encore*

$$(5.2.8) \qquad \frac{d\omega(z)}{dz}\Big|_{z=\omega_j(r)} \neq 0 \quad \textit{pour chaque} \quad j=0,1,2,\ldots$$

<u>Démonstration</u>

Rappelant (3.63), (3.64), (3.103), (3.104), (4.5), (4.87), un calcul simple montre que

$$(5.2.9) \qquad - i\, e^{\xi'_{2,j}(r)h} \left[\frac{d\omega(z)}{dz}\right]_{z=\omega_j(r)} =$$

$$= \frac{1}{c_1^2\xi_{i,j}(r)} \left[\left(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} - \frac{\xi_{i,j}(r)}{\mu_1}\right)\cos \xi_{1,j}(r)h \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} + \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\right)\sin \xi_{1,j}(r)h\right]$$

$$- \left(\frac{1}{c_0^2\mu_0} \frac{1}{\xi'_{0,j}(r)} + \frac{1}{c_2^2\mu_2} \frac{1}{\xi'_{2,j}(r)}\right) \cos \xi_{1,j}(r)h$$

$$- \left(\frac{1}{c_1^2\mu_1\xi_{1,j}(r)} + \frac{1}{c_0^2\mu_0\xi'_{0,j}(r)} \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)}\right.$$

$$\left. + \frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} \frac{1}{c_2^2\mu_2\xi'_{2,j}(r)} \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} + \frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{c_1^2\xi_{1,j}^3(r)}\right)\sin \xi_{1,j}(r)h.$$

Rappelons que nous avons

$$(5.2.10) \qquad \left(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} + \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\right)\cos \xi_{1,j}(r)h$$

$$+ \left(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} - \frac{\xi_{1,j}(r)}{\mu_1}\right) \sin \xi_{1,j}(r)h = 0 .$$

Par suite, on a

$$(5.2.11) \qquad \left(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} - \frac{\xi_{1,j}(r)}{\mu_1}\right)\cos \xi_{1,j}(r)h$$

$$= - \left(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} + \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\right)^{-1} \left(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} - \frac{\xi_{1,j}(r)}{\mu_1}\right)^2$$

$$\sin \xi_{1,j}(r)h .$$

De (3.64), on déduit que

(5.2.12) $\quad j\,\pi < \xi_{1,j}(r)h < (j+1)\pi \qquad , \qquad j=0,1,2,\ldots$

Par suite, $\sin \xi_{1,j}(r)h$ a un signe constant et on a

(5.2.13)
$$\begin{aligned} &\sin \xi_{1,j}(r)h > 0 \quad \text{si } j \text{ est pair} \\ &\sin \xi_{1,j}(r)h < 0 \quad \text{si } j \text{ est impair .} \end{aligned}$$

Par suite, si j est pair et si $j\,\pi < \xi_{1,j}(r)h \leq (j+\frac{1}{2})\,\pi$, alors (5.2.9) et (5.2.11) montrent dans ce cas que

$$\left[\frac{d\omega(z)}{dz}\right]_{z=\omega_j(r)} \neq 0 \ .$$

De même, si j est impair et si $j\,\pi < \xi_{1,j}(r)h \leq (j+\frac{1}{2})\pi$, alors (5.2.9) et (5.2.11) montrent aussi que, dans ce cas,

$$\left[\frac{d\omega(z)}{dz}\right]_{z=\omega_j(r)} \neq 0 \ .$$

Pour traiter les deux autres cas, considérons l'expression suivante

(5.2.14)
$$\begin{aligned} A = &- \left(\frac{1}{c^2\mu_0}\,\frac{1}{\xi'_{0,j}(r)} + \frac{1}{c_2^2\mu_2}\,\frac{1}{\xi'_{2,j}(r)}\right)\cos \xi_{1,j}(r)h \\ &- \left(\frac{1}{c_0^2\mu_0\xi'_{0,j}(r)}\,\frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} \right. \\ &\left. + \frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0}\,\frac{1}{c_2^2\mu_2\xi'_{2,j}(r)}\,\frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)}\right)\sin \xi_{1,j}(r)h \end{aligned}$$

$$= - \left(\frac{\varepsilon_0}{\xi'_{0,j}(r)} + \frac{\varepsilon_2}{\xi'_{2,j}(r)}\right)\cos \xi_{1,j}(r)h$$

$$- \left(\frac{\varepsilon_0}{\xi'_{0,j}(r)} \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_2}{\xi'_{2,j}(r)} \frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0}\right)\frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} \sin \xi_{1,j}(r)h$$

$$= - \frac{\varepsilon_0}{\xi'_{0,j}(r)} \left(\cos \xi_{1,j}(r)h + \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} \sin \xi_{1,j}(r)h\right)$$

$$- \frac{\varepsilon_2}{\xi'_{2,j}(r)} \left(\cos \xi_{1,j}(r)h + \frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} \sin \xi_{1,j}(r)h\right) .$$

Or, en utilisant (5.2.10), on montre facilement que l'on a

$$A = \left(\frac{1}{c_0^2\xi'_{0,j}(r)^2} \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2} + \frac{1}{c_2^2\xi'_{2,j}(r)^2} \frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0}\right) \cos \xi_{1,j}(r)h \tag{5.2.15}$$

$$- \left(\frac{1}{c_0^2\xi'_{0,j}(r)^2} + \frac{1}{c_2^2\xi'_{2,j}(r)^2}\right) \frac{\xi_{1,j}(r)}{\mu_1} \sin \xi_{1,j}(r)h .$$

Maintenant, si j est pair et si $(j+ \frac{1}{2})\pi < \xi_{1,j}(r)h < (j+1)\pi$, si j est impair et si $(j+ \frac{1}{2})\pi \leq \xi_{1,j}(r)h < (j+1)\pi$, alors $\sin \xi_{1,j}(r)h$ et $\cos \xi_{1,j}(r)h$ sont de signe contraire. Il résulte alors de (5.2.14) et de (5.2.15) que tous les termes du membre de droite de (5.2.9) sont des nombres réels différents de zéro et de même signe; par suite, dans ce cas aussi, on a

$$\left[\frac{d\omega(z)}{dz}\right]_{z=\omega_j(r)} \neq 0$$

ce qui achève la démonstration du lemme 5.2. □

Les solutions $u^{-\infty}(y,r;\omega_j(r))$ et $u^{\infty}(y,r;\omega_j(r))$ sont proportionnelles : on a

$$(5.2.16) \qquad u^{\infty}(y,r;\omega_j(r)) = C(\omega_j(r))u^{-\infty}(y,r;\omega_j(r)) .$$

En se reportant aux expressions (4.92)-(4.99), on voit immédiatement que l'on a

$$(5.2.17) \qquad C(\omega_j(r)) = \frac{1}{2}\, e^{-\xi'_{2,j}(r)h} \frac{\mu_0}{\xi'_{0,j}(r)}\Big(\Big(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} - \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\Big)\cos \xi_{1,j}(r)h$$

$$+ \Big(\frac{\xi_{1,j}(r)}{\mu_1} + \frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0}\,\frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)}\Big)\sin \xi_{1,j}(r)h\Big) ,$$

$C(\omega_j(r))$ est une constante réelle.

En utilisant (5.2.10), on montre facilement que l'on a aussi

$$(5.2.18) \qquad C(\omega_j(r)) = e^{-\xi'_{2,j}(r)h} \Big(\cos \xi_{1,j}(r)h + \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} \sin \xi_{1,j}(r)h\Big) .$$

En utilisant de nouveau (5.2.10), on trouve que

$$(5.2.19) \qquad C(\omega_j(r)) = e^{-\xi'_{2,j}(r)h} \Big(\frac{\xi'_{0,j}(r)}{\mu_0} + \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\Big)^{-1}$$

$$\Big(\frac{\xi_{1,j}(r)}{\mu_1} + \Big(\frac{\xi'_{2,j}}{\mu_2}\Big)^2 \frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)}\Big)\sin \xi_{1,j}(r)h .$$

(5.2.19) montre que $C(\omega_j(r))$ est du même signe que $\sin \xi_{1,j}(r)h$.

Posons

$$(5.2.20) \qquad \mu(\omega_j(r)) = -\, i\, e^{\xi'_{2,j}(r)h} \Big[\frac{d\omega(z)}{dz}\Big]_{z=\omega_j(r)} .$$

La démonstration du lemme 5.2 a montré que $\mu(\omega_j(r))$ est une constante réelle de même signe que $-\sin \xi_{1,j}(r)h$.

De (5.1.7) et (5.2.6) on déduit immédiatement que l'on a

$$(5.2.21) \qquad (E(\varepsilon,\mu,r;\{\omega_j(r)\})f,g) =$$

$$= -\frac{\omega_j(r)}{\mu(\omega_j(r))}(\cos \xi_{1,j}(r)h + \frac{\xi'_{,j}(r)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} \sin \xi_{1,j}(r)h)$$

$$(f,u^{-\infty}(.,r;\omega_j(r)))(u^{-\infty}(.,r;\omega_j(r)),g) \ .$$

Or, en vertu des remarques qui précèdent, la constante

$$-\frac{\omega_j(r)}{\mu(\omega_j(r))}(\cos \xi_{1,j}(r)h + \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} \sin \xi_{1,j}(r)h)$$

est toujours strictement positive. On pose donc

$$(5.2.22) \qquad a_j(r) = (-\frac{\omega_j(r)}{\mu(\omega_j(r))}(\cos \xi_{1,j}(r)h + \frac{\xi'_{2,j}(r)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_{1,j}(r)} \sin \xi_{1,j}(r)h))^{1/}$$

Posons maintenant

$$(5.2.23) \qquad u^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y) = a_j(r)u^{-\infty}(y,r,\omega_j(r)) \ .$$

On a alors

$$(5.2.24) \qquad (E(\varepsilon,\mu,r;\{\omega_j(r)\})f)(y) = u^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y)(f,u^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;.))_{H(\varepsilon,\mu,r)} \ .$$

On sait que l'élément

$$(5.2.25)\qquad v^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y) = \begin{pmatrix} u_1^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y) \\ -u_2^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y) \\ -u_3^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y) \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$ pour la valeur propre $-\omega_j(r)$. On constate immédiatement que ce vecteur propre est normalisé à l'unité :

$$(5.2.26)\qquad ||v^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;.)||_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})} = 1 .$$

Par suite, on a

$$(5.2.27)\qquad (E(\varepsilon,\mu,r;\{-\omega_j(r)\})f)(y) =$$

$$= v^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y)(f,v^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;.)_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})} .$$

On peut, en résumé, énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.3

Supposons que $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$. *Soit* $r_k < r < r_{k+1}$, $k \geq 0$, *alors l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu,r)$ *a* $2(k+1)$ *valeurs propres.*
Définissons

$$(5.2.28)\qquad \hat{f}_{j+}(\varepsilon,\mu,r) = (f(.),u^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;.))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}$$

$$(5.2.29)\qquad \hat{f}_{j-}(\varepsilon,\mu,r) = (f(.),v^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;.))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}$$

pour tout $f \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ *et tout* $j=0,1,\dots,k$.
Définissons les applications $U_{r\pm,d}(\varepsilon,\mu,r)$ *suivantes :*

$$(5.2.30)\qquad U_{r\pm,d}(\varepsilon,\mu,r):H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^{k+1}$$

par

(5.2.31) $\quad U_{r+;d}(\varepsilon,\mu,r)f = (\hat{f}_{0+}(\varepsilon,\mu,r),\hat{f}_{1+}(\varepsilon,\mu,r),\dots,\hat{f}_{k+}(\varepsilon,\mu,r)) \in \mathbb{C}^{k+1}$.

(5.2.32) $\quad U_{r-,d}(\varepsilon,\mu,r)f = (\hat{f}_{0-}(\varepsilon,\mu,r),\hat{f}_{1-}(\varepsilon,\mu,r),\dots,\hat{f}_{k-}(\varepsilon,\mu,r)) \in \mathbb{C}^{k+1}$.

Alors

(5.2.33) $\quad [U_{r+,d}(\varepsilon,\mu,r)^*\{(\hat{f}_{0+}(\varepsilon,\mu,r),\hat{f}_{1+}(\varepsilon,\mu,r),\dots,\hat{f}_{k+}(\varepsilon,\mu,r))\}](y)$

$$= \sum_{j=0}^{k} \hat{f}_{j+}(\varepsilon,\mu,r)u^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y)$$

(5.2.34) $\quad [U_{r-,d}(\varepsilon,\mu,r)^*\{(\hat{f}_{0-}(\varepsilon,\mu,r),\hat{f}_{1-}(\varepsilon,\mu,r),\dots,\hat{f}_{k-}(\varepsilon,\mu,r))\}](y)$

$$= \sum_{j=0}^{k} \hat{f}_{j-}(\varepsilon,\mu,r)v^{(j)}(\varepsilon,\mu,r;y) \ .$$

De plus

(5.2.35) $\quad U_{r\pm,d}(\varepsilon,\mu,r)U_{r\pm,d}(\varepsilon,\mu,r)^* = 1$

(5.2.36) $\quad U_{r+,d}(\varepsilon,\mu,r)^*U_{r+,d}(\varepsilon,\mu,r) = E(\varepsilon,\mu,r;(c_1r,c_0r))$

(5.2.37) $\quad U_{r-,d}(\varepsilon,\mu,r)^*U_{r-,d}(\varepsilon,\mu,r) = E(\varepsilon,\mu,r;(-c_0r,-c_1r))$.

Si $r = r_k$, $k \geq 1$, *l'opérateur* $A(\varepsilon,\mu,r)$ *a* $2k$ *valeurs propres et dans ce cas l'énoncé du théorème reste le même à condition de faire varier* j *entre* 0 *et* $k-1$.

La construction complète de la famille spectrale $\Pi(\varepsilon,\mu,r;\lambda)$ de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$ est basée sur l'analogue de la théorie de Weyl-Kodaira. A la connaissance de l'auteur, la transposition de la théorie de Weyl-Kodaira n'a pas encore été faite pour l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$. Considérons le coefficient matriciel de $\frac{d}{dy}$ dans l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$; on voit immédiatement (cf. 2.72) que celui-ci est égal à

$$(5.2.38)\qquad \begin{pmatrix} 0 & i\,\varepsilon(y)^{-1} & 0 \\ i\,\mu(y)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

or, la matrice (5.2.38) est singulière. Or, dans la littérature, seul le cas de système du premier ordre tels que le coefficient matriciel de l'opérateur $\frac{d}{dy}$ ne soit pas singulier, a été traité (cf. [9 , exc. 20, p. 260]).

En fait, la singularité de la matrice (5.2.38) se traduit par le fait que $\lambda = \{0\}$ est une valeur propre de multiplicité infinie, ou d'une matrice équivalente, par la présence du tèrme $\frac{1}{z} P_3$ dans l'expression (4.56) de la résolvante. Mais, une fois calculé le projecteur $\Pi(\varepsilon,\mu,r;\{0\})$, le facteur $\frac{1}{z} P_3$ ne joue aucun rôle dans la détermination de la famille spectrale $\Pi(\varepsilon,\mu,r;\lambda)$, $\lambda \neq 0$, et la théorie est alors strictement analogue à celle de Weyl-Kodaira comme on peut le montrer. Les détails sont fort longs et ne sont qu'une transcription directe de la théorie classique. Aussi, on se contentera ici de rassembler les résultats dans deux théorèmes basés sur une formulation de la théorie de Weyl-Kodaira due à N. Dunford et J.T. Schwartz [10].

Théorème 5.4

Soit $A(\varepsilon,\mu,r)$ *l'opérateur autoadjoint défini par (2.71) et (2.72).*
Soit $\Pi(\varepsilon,\mu,\lambda)$ *sa famille spectrale.*
Supposons que :

(5.2.39) $\quad \Lambda = (\lambda_0,\lambda_1) \subset \mathbb{R} - \{0\}$

(5.2.40) $\quad \phi^j(\varepsilon,\mu,r;\lambda,y)$ *sont définies et continues pour* $(y,\lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda$ *et* $j=1,2$.

(5.2.41) $\quad \phi^j(\varepsilon,\mu,r;\lambda,y)$, $j=1,2$ *est une base pour les solutions de*

$$A(\varepsilon,\mu,r)\phi^j(\varepsilon,\mu,r;\lambda,y) = \lambda\ \phi^j(\varepsilon,\mu,r;\lambda,y)$$

pour $y \in I$ *et* $\lambda \in \Lambda$.

Il existe alors une mesure matricielle positive unique $\rho = (\rho_{jk}),j,k=1,2$ *sur* Λ *telle que*

1. *pour tout* $f(.) \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ *la limite suivante*

(5.2.42)
$$\hat{f}(\lambda) = (\hat{f}_1(\lambda),\hat{f}_2(\lambda)) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} ((f(.),\chi_{[a,b]}(.)\phi^1(\varepsilon,\mu,r;\lambda,.))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}, \quad f(.),\chi_{[a,b]}(.)\phi^2(\varepsilon,\mu,r;\lambda,.))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}$$

existe dans l'espace de Hilbert $L^2(\Lambda,\rho)$, *où* $\chi_{[a,b]}(.)$ *est la fonction caractéristique de l'intervalle* $[a,b]$;

2. *l'application* $T(\varepsilon,\mu,r):H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) \to L^2(\Lambda,\rho)$ *définie pour* $T(\varepsilon,\mu,r)f = \hat{f}(.)$, *est un opérateur partiellement isométrique surjectif de projecteur initial* $\Pi(\varepsilon,\mu,r;\lambda)$;

3. *l'isomorphisme inverse* $T(\varepsilon,\mu,r)^*$ *de* $L^2(\Lambda,\rho)$ *sur* $\Pi(\varepsilon,\mu,r;\lambda)H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ *est donné par*

(5.2.43) $$(T(\varepsilon,\mu,r)^*\hat{f})(y) = H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) - \lim_{\substack{\mu_0\to\lambda_0\\ \mu_1\to\lambda_1}} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \sum_{j,k=1}^{2} \phi^k(\varepsilon,\mu,r;\lambda,y)\hat{f}_j(\lambda)d\rho_{jk}(\lambda)$$

avec $[\mu_0,\mu_1] \subset \Lambda$

4. *pour toute fonction borélienne* $\psi(\lambda)$ *sur* $\mathbb{R}$ *dont le support est contenu dans* Λ *on a*

(5.2.44) $$T(\varepsilon,\mu,r)D(\psi(A(\varepsilon,\mu,r))) = L^2(\Lambda,\rho) \cap \{\hat{f}:\psi(\lambda)\hat{f}(\lambda) \in L^2(\Lambda,\rho)\}$$

et

(5.2.45) $$T(\varepsilon,\mu,r)\psi(A(\varepsilon,\mu,r))f)(\lambda) = \psi(\lambda)\hat{f}(\lambda) .$$

Le théorème suivant permet de déterminer la mesure matricielle $(\rho_{jk}(.))$.

Théorème 5.5

Soient $A(\varepsilon,\mu,r),\Lambda,\phi^j(\varepsilon,\mu,r;\lambda,y)$ $(j=1,2)$ *vérifiant les conditions du théorème 5.4 et soit* $\rho(.)$ *la mesure matricielle correspondante. Soit* $[\mu_1,\mu_2]$ *un intervalle compact contenu dans* Λ *et soit* $\theta((\mu_1,\mu_2))$ *un voisinage complexe de* (μ_1,μ_2)*. Supposons que les fonctions* $\phi^j(\varepsilon,\mu,r;\lambda,y)$ $(j=1,2)$ *soient prolongées par des fonctions* $\phi^j(\varepsilon,\mu,r;z,y)$ $(j=1,2)$, *avec* $(z,y) \in \theta((\mu_1,\mu_2)) \times (\mathbb{R}-\{0\}\cup\{\lambda\}))$ *telles que*

1. *les fonctions* $(z,y) \to \phi^j(\varepsilon,\mu,r;z,y)$ $(j=1,2)$ *soient continues sur* $\theta((\mu_1,\mu_2)) \times (\mathbb{R}-(\{0\}\cup\{h\}))$;
2. $\phi^j(\varepsilon,\mu,r;z,.)$ $(j=1,2)$ *forment une base de l'équation*

$$A(\varepsilon,\mu,r)\phi^j(\varepsilon,\mu,r;z,.) = z\ \phi^j(\varepsilon,\mu,r;z,.)$$

pour tout $z \in \theta((\mu_1,\mu_2))$;

3. les fonctions $\phi^j(\varepsilon,\mu,r;z,y)$ $(j=1,2)$ *sont analytiques sur* $\theta((\mu_1,\mu_2))$ *pour presque tout* $y \in \mathbb{R}$ *fixé.*

La fonction de Green $G(\varepsilon,\mu,r;y,y',z)$ *donnée par (4.32)-(4.38) a alors la représentation suivante, pour* $i=1,2,3$ *et* $j=1,2,3$

$$(5.2.46)\qquad G_{i,j}(\varepsilon,\mu,r;y,y',z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k,\ell=1}^{2} \theta^-_{k\ell}(z)\phi^k_i(\varepsilon,\mu,r;z,y)\overline{\phi^\ell_j(\varepsilon,\mu,r;\bar z,y')} & \text{pour } y \le y' \\ \displaystyle\sum_{k,\ell=1}^{2} \theta^+_{k\ell}(z)\phi^k_i(\varepsilon,\mu,r;z,y)\overline{\phi^\ell_j(\varepsilon,\mu,r;\bar z,y')} & \text{pour } y \ge y' \end{cases}$$

pour tout $z \in \theta((\mu_1,\mu_2))$, $\mathrm{Im}z \neq 0$.

De plus, la matrice 2×2 : $\theta^\pm(z) = (\theta^\pm_{k\ell}(z))$ *possède les propriétés suivantes :*

a. $\theta^\pm(z)$ *est analytique sur* $\theta((\mu_1,\mu_2)) - \mathbb{R}$;

b. on a

$$(5.2.47)\qquad \rho((\mu_1,\mu_2)) = \lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{\mu_1+\delta}^{\mu_2-\delta} \{\theta^\pm(\lambda+i\varepsilon)-\theta^\pm(\lambda-i\varepsilon)\}d\lambda\,.$$

Nous allons maintenant utiliser ces deux théorèmes pour achever l'analyse spectrale de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$.

5.2.2. Cas de $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_0r,c_2r))H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) \oplus \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_2r,-c_0r))H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$

Afin d'appliquer les théorèmes 5.4 et 5.5, il est nécessaire d'utiliser des solutions de l'équation $A(\varepsilon,\mu,r)\phi = z\,\phi$ analytiques dans un voisinage complexe de (c_0r,c_2r) et de $(-c_2r,-c_0r)$. A cette fin, nous utiliserons les déterminations $z \to \xi_j(z)$, $j=0,1$ et $z \to \xi_2'(z)$ définies respectivement dans les définitions 4.1 et 4.11. Chacune de ces fonctions est analytique dans l'ouvert

$$(5.2.48) \qquad \theta = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, z \in (c_0 r, c_2 r) \cup (-c_2 r, -c_0 r)\} .$$

On montre alors facilement à partir de (4.97)-(4.99) et de (4.88) et (4.89) que l'on a *à la fois pour* $\mathrm{Im}\, z > 0$ *et* $\mathrm{Im}\, z < 0$

$$(5.2.49) \quad u_1^\infty(y,r,z) = \begin{cases} e^{-\xi_2'(z)h} \{ \frac{1}{2} e^{-i\xi_0(z)y} (\cos \xi_1(z)h\ (1 - i \frac{\mu_0}{\xi_0(z)} \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}) \\ \qquad + \sin \xi_1(z)h\ (\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_1(z)} + i \frac{\mu_0}{\xi_0(z)} \frac{\xi_1(z)}{\mu_1})) \\ \qquad + \frac{1}{2} e^{i\xi_0(z)y} (\cos \xi_1(z)h\ (1 + i \frac{\mu_0}{\xi_0(z)} \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}) \\ \qquad + \sin \xi_1(z)h\ (\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_1(z)} - i \frac{\mu_0}{\xi_0(z)} \frac{\xi_1(z)}{\mu_1}))\} \\ \qquad\qquad \text{pour } \ y \le 0 \\ e^{-\xi_2'(z)h} (\cos \xi_1(z)(y-h) - \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\xi_1(z)} \sin \xi_1(z)(y-h)) \\ \qquad\qquad \text{pour } \ 0 \le y \le h \\ e^{-\xi_2'(z)y} \qquad\qquad \text{pour } \ y \ge h \end{cases}$$

$$
(5.2.50)\quad u_2^\infty(y,r,z)=\begin{cases}
\frac{i}{z}\, e^{-\xi_2'(z)h}\Big\{\frac{1}{2}\, e^{-i\xi_0(z)y}\Big(-\cos \xi_1(z)h\Big(i\,\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}+\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\Big) \\
\qquad + \sin \xi_1(z)h\,\Big(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} - i\,\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}\Big)\Big) \\
\qquad + \frac{1}{2}\, e^{i\xi_0(z)h}\Big(-\cos \xi_1(z)h\Big(-i\,\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}+\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\Big) \\
\qquad + \sin \xi_1(z)h\Big(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} + i\,\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}\Big)\Big)\Big\} & \text{pour } y \le 0 \\
-\frac{i}{z}\, e^{-\xi_2'(z)h}\Big(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}\sin \xi_1(z)(y-h) + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\cos \xi_1(z)(y-h)\Big) & \text{pour } 0 \le y \le h \\
-\frac{i}{z}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\, e^{-\xi_2'(z)y} & \text{pour } y \ge h
\end{cases}
$$

$$
(5.2.51)\qquad u_3^\infty(y,r,z) = \frac{r}{z}\,\frac{1}{\mu(y)}\; u_1^\infty(y,r,z) \qquad \text{pour } y \in \mathbb{R} - (\{0\}\cup\{h\}) .
$$

En fait, $u^\infty(y,r,z)$, définie par (5.2.49)-(5.2.51), est aussi solution de $A(\varepsilon,\mu,r)u^\infty = z\, u^\infty$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $z \in (c_0r,c_2r)\cup(-c_2r,-c_0r)$; ainsi prolongée $u^\infty(y,r,z)$ est analytique en tout point $z \in \theta$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

Maintenant, nous introduisons deux solutions de l'équation

$$A(\varepsilon,\mu,z)\phi(y,r,z) = z\, \phi(y,r,z) .$$

La première, notée $\phi^1(y,r,z)$, est la solution analytique en tout point $z \in \theta$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, qui coïncide avec $u^{-\infty}(y,r,z)$ en tout point $z \in \theta$ tel que $\mathrm{Im}\, z > 0$. La seconde, notée $\phi^2(y,r,z)$, est la solution analytique en tout point $z \in \theta$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, qui coïncide avec $u^{-\infty}(y,r,z)$ en tout point $z \in \theta$ tel que $\mathrm{Im}\, z < 0$. Il résulte, de (4.93)-(4.95) et de (4.88) et (4.89), que l'on a

$$(5.2.52)\quad \phi_1^1(y,r,z) = \begin{cases} e^{-i\xi_0(z)y}, & y \le 0 \\[2mm] \cos \xi_1(z)y - i\, \dfrac{\mu_1}{\mu_0}\dfrac{\xi_0(z)}{\xi_1(z)} \sin \xi_1(z)y, & 0 \le y \le h \\[2mm] \dfrac{1}{2}\, e^{\xi_2'(z)(y-h)}\, \dfrac{\mu_2}{\xi_2'(z)} \Big(\cos \xi_1(z)h\big(\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2} - i\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\big) \\ \qquad - \sin \xi_1(z)h\big(i\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)} + \dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1}\big)\Big) \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\, e^{-\xi_2'(z)(y-h)}\, \dfrac{\mu_2}{\xi_2'(z)}\Big(\cos \xi_1(z)h\big(i\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0} + \dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\big) \\ \qquad + \sin \xi_1(z)h\,\big(\dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1} - i\,\dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)}\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\big)\Big), \\ & y \ge h \end{cases}$$

$$(5.2.53)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{z}\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\, e^{-i\xi_0(z)y}\,, & y \le 0 \\[2ex] \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\cos \xi_1(z)y - i\,\dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1}\sin \xi_1(z)y\right) & \\ & 0 \le y \le h \\[2ex] \dfrac{i}{z}\Big(\dfrac{1}{2}\, e^{\xi_2'(z)(y-h)}\Big(\cos \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2} - i\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\Big) & \\ \quad - \sin \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1} + i\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)}\Big)\Big) & \\ \quad + \dfrac{1}{2}\, e^{-\xi_2'(z)(y-h)}\Big(-\cos \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2} + i\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\Big) & \\ \quad - \sin \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1} - i\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\dfrac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)}\Big)\Big)\Big) & \\ & y \ge h \end{cases}$$

$$(5.2.54)\qquad \phi_3^1(y,r,z) = \frac{r}{z}\,\frac{1}{\mu(y)}\,\phi_1^1(y,r,z) \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R} - (\{0\}\cup\{h\})\ .$$

Compte tenu de (4.28)-(4.30), on pose donc, pour tout $z \in \theta$:

$$(5.2.55)\qquad \phi_1^2(y,r,z) = \overline{\phi_1^1(y,r,\bar{z})}$$

$$(5.2.56)\qquad \phi_2^2(y,r,z) = -\,\overline{\phi_2^1(y,r,\bar{z})}$$

$$(5.2.57)\qquad \phi_3^2(y,r,z) = \overline{\phi_3^1(y,r,\bar{z})}\ .$$

Il résulte de (4.88), (4.89), (4.100), (5.2.49)-(5.2.54), que l'on a

$$(5.2.58)\qquad W(u^\infty(.,r,z),\phi^1(.,r,z))$$

$$= \frac{e^{-\xi_2'(z)h}}{z}\Big\{\Big(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} + i\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\Big)\cos \xi_1(z)h$$

$$+ \Big(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)} - i\,\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}\Big)\sin \xi_1(z)h\Big\}\ .$$

(5.2.59) $\quad W(u^{\infty}(.,r,z),\phi^{2}(.,r,z)) =$

$$= \frac{e^{-\xi_2'(z)h}}{z}\{(-\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} + i\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2})\cos \xi_1(z)h$$

$$-(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\xi_1(z)} + i\frac{\xi_1(z)}{\mu_1})\sin \xi_1 h\}.$$

Il résulte de (5.2.52)-(5.2.57) que l'on a pour tout $z \in \theta$:

(5.2.60) $\quad W(\phi^{1}(.,r,z),\phi^{2}(.,r,z)) = -\frac{2}{z}\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}$.

Nous savons déjà que $W(u^{\infty}(.,r,z),\phi^{1}(.,r,z)) \neq 0$ pour tout $z \in \theta$ tel que $\operatorname{Im} z > 0$; de même $W(u^{\infty}(.,r,z),\phi^{2}(.,r,z)) \neq 0$ pour tout $z \in \theta$ tel que $\operatorname{Im} z < 0$. On déduit immédiatement de (5.2.60) que $W(\phi^{1}(.,r,z),\phi^{2}(.,r,z)) \neq 0$ pour tout $z \in \theta$.

On désire montrer que $W(u^{\infty}(.,r,z),\phi^{1}(.,r,z)) \neq 0$ pour tout $z \in \theta$ appartenant à un voisinage complexe de tout intervalle $[\lambda_1,\lambda_2]$ contenu dans $(c_0 r,c_2 r) \cup (-c_2 r,-c_0 r)$.

Posons pour tout $z \in \theta$:

(5.2.61) $\quad g(z) = \frac{e^{-\xi_2'(z)h}}{z}\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}(\cos \xi_1(z)h + \frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}\sin \xi_1(z)h)$

(5.2.62) $\quad h(z) = \frac{e^{-\xi_2'(z)h}}{z}(\frac{\xi_2'(z)}{\mu_2}\cos \xi_1(z)h - \frac{\xi_1(z)}{\mu_1}\sin \xi_1(z)h)$.

On a alors

(5.2.63) $\quad \overline{g(\bar{z})} = g(z)$ pour tout $z \in \theta$

(5.2.64) $\overline{h(\bar{z})} = h(z)$.

En particulier, $g(\lambda)$ et $h(\lambda)$ sont réels pour tout $\lambda \in (c_0 r, c_2 r) \cup (-c_2 r, -c_0 r)$.

De plus, on a, pour tout $z \in \theta$,

(5.2.65) $W(u^\infty(.,r,z),\phi^1(.,r,z)) = g(z) + i\, h(z)$

(5.2.66) $W(u^\infty(.,r,z),\phi^2(.,r,z)) = -g(z) + i\, h(z)$.

Supposons d'abord qu'il existe $\lambda_0 \in (c_0 r, c_2 r) \cup (-c_2 r, -c_0 r)$ tel que

(5.2.67) $W(u^\infty(.,r,\lambda_0),\phi^1(.,r,\lambda_0)) = g(\lambda_0) + i\, h(\lambda_0) = 0$.

Comme $g(\lambda_0)$ et $h(\lambda_0)$ sont deux nombres réels, (5.2.67) implique que

(5.1.68) $g(\lambda_0) = h(\lambda_0) = 0$

et par suite

(5.2.69) $W(u^\infty(.,r,\lambda_0),\phi^2(.,r,\lambda_0)) = -\, g(\lambda_0) + i\, h(\lambda_0) = 0$.

Il existe donc deux constantes $c_1^\infty(\lambda_0)$ et $c_2^\infty(\lambda_0)$, différentes de zéro, telles que

(5.2.70) $u^\infty(.,r,\lambda_0) = c_1^\infty(\lambda_0)\phi^1(.,r,\lambda_0)$

(5.2.71) $u^\infty(.,r,\lambda_0) = c_2^\infty(\lambda_0)\phi^2(.,r,\lambda_0)$.

(5.2.70) et (5.2.71) impliquent que les deux solutions $\phi^1(.,r,\lambda_0)$ et $\phi^2(.,r,\lambda_0)$ sont linéairement dépendantes, ce qui contredit le fait que $W(\phi^1(.,r,\lambda_0),\phi^2(.,r,\lambda_0)) \neq 0$. Donc

$W(u^\infty(.,r,\lambda),\phi^1(.,r,\lambda))$ ne s'annulle pas sur $(c_0 r,c_2 r) \cup (-c_2 r,-c_0 r)$.

Considérons maintenant $z_0 \in \theta$ tel que $\mathrm{Im}\, z_0 < 0$ et tel que

(5.2.72) $\quad W(u^\infty(.,r,z_0),\phi^1(.,r,z_0)) = g(z_0) + i\, h(z_0) = 0$.

On sait par ailleurs que

(5.2.73) $\quad W(u^\infty(.,r,z_0),\phi^2(.,r,z_0)) = -g(z_0) + i\, h(z_0) \neq 0$;

on déduit donc de (5.2.72) et de (5.2.73) que

(5.2.74) $\quad W(u^\infty(.,r,z_0),\phi^2(.,r,z_0)) = 2i\, h(z_0) = 2g(z_0)$.

De (5.2.73) et de (5.2.74), on déduit que

(5.2.75) $\quad g(z_0) \neq 0$ et $h(z_0) \neq 0$.

Compte tenu de (5.2.63), (5.2.64) et de (5.2.75), on a

(5.2.76) $\quad g(\bar z_0) \neq 0$ et $h(\bar z_0) \neq 0$.

De (5.2.63), (5.2.64), (5.2.66), (5.2.72) et (5.2.73), on déduit que

(5.2.77) $\quad 0 = \overline{g(z_0)} - i\, \overline{h(z_0)} = g(\bar z_0) - i\, h(\bar z_0) = -\, W(u^\infty(.,r,\bar z_0),\phi^2(.,r,\bar z_0))$

Ainsi, les zéros de $W(u^\infty(.,r,z),\phi^2(.,r,z))$ dans $\theta \cap \{z \in \mathbb{C};\mathrm{Im}\, z > 0\}$ sont les complexes conjugués des zéros de $W(u^\infty(.,r,z),\phi^1(.,r,z))$ dans $\theta \cap \{z \in \mathbb{C};\mathrm{Im}\, z < 0\}$ et réciproquement.

Soit maintenant un intervalle ouvert (λ_1,λ_2) tel que $[\lambda_1,\lambda_2] \subset (c_0 r,c_2 r) \cup (-c_2 r,-c_0 r)$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors, dans le compact

$\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, z \in [\lambda_1,\lambda_2],\ \mathrm{Im}\, z \in [-\varepsilon,\varepsilon]\}$, contenu dans θ, la fonction analytique

$$z \to W(u^{\infty}(.,r,z),\phi^{1}(.,r,z))$$

n'a qu'un nombre fini de zéros qui, en vertu de ce qui précède et s'il en existe, sont tous contenus dans $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, z \in [\lambda_1,\lambda_2],\ \mathrm{Im}\, z \in [-\varepsilon,0)\}$. Il résulte alors qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ dépendant de l'intervalle $[\lambda_1,\lambda_2]$ tel que l'ouvert $\theta((\lambda_1,\lambda_2)) = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z(\lambda_1,\lambda_2),\ \mathrm{Im}\, z > -\varepsilon_0\}$ ne contienne aucun zéro de la fonction $z \to W(u^{\infty}(.,r,z),\phi^{1}(.,r,z))$. On peut donc appliquer le théorème 5.5 à l'ouvert $\theta((\lambda_1,\lambda_2))$ et à la base $\{\phi^{1}(.,r,z),u^{\infty}(.,r,z)\}$.

De (4.35), on déduit immédiatement que l'on a, pour $y \leq y'$ et $\lambda \pm i\varepsilon \in \theta((\lambda_1,\lambda_2))$:

$$(5.2.78) \qquad G_{i,j}(\varepsilon,\mu,r;y,y',\lambda+i\varepsilon) = i\,\frac{\phi_i^{1}(y,r,\lambda+i\varepsilon)\overline{u_j^{\infty}(y',r,\lambda-i\varepsilon)}}{W(u^{\infty}(.,r,\lambda+i\varepsilon),\phi^{1}(.,r,\lambda+i\varepsilon))}\ .$$

D'où, l'on déduit

$$(5.2.79) \qquad \theta_{11}(\lambda+i\varepsilon) = \theta_{22}(\lambda+i\varepsilon) = \theta_{21}(\lambda+i\varepsilon) = 0$$

$$(5.2.80) \qquad \theta_{12}(\lambda+i\varepsilon) = \frac{i}{W(u^{\infty}(.,r,\lambda+i\varepsilon),\phi^{1}(.,r,\lambda+i\varepsilon))}\ .$$

Pour $\lambda-i\varepsilon$, on a

$$(5.2.81) \qquad G_{i,j}(\varepsilon,\mu,r;y,y',\lambda-i\varepsilon) = i\,\frac{\phi_i^{2}(y,r,\lambda-i\varepsilon)\overline{u_j^{\infty}(y',r,\lambda+i\varepsilon)}}{W(u^{\infty}(.,r,\lambda-i\varepsilon),\phi^{2}(.,r,\lambda-i\varepsilon))}\ .$$

Mais on a

$$(5.2.82) \qquad \phi^{2}(y,r,z) = c_1^{2}(z)\phi^{1}(y,r,z) + c_\infty^{2}(z)u^{\infty}(y,r,z)$$

avec

$$(5.2.83) \qquad c_1^2(z) = \frac{W(\phi^2(.,r,z),u^\infty(.,r,z))}{W(\phi^1(.,r,z),u^\infty(.,r,z))}$$

$$(5.2.84) \qquad c_\infty^2(z) = \frac{W(\phi^2(.,r,z),\phi^1(.,r,z))}{W(u^\infty(.,r,z),\phi^1(.,r,z))} .$$

Il résulte de (5.2.81)-(5.2.84) que l'on a :

$$(5.2.85) \qquad \theta_{11}(\lambda-i\varepsilon) = \theta_{21}(\lambda-i\varepsilon) = 0$$

$$(5.2.86) \qquad \theta_{12}(\lambda-i\varepsilon) = \frac{i\, c_1^2(z)}{W(u^\infty(.,r,\lambda-i\varepsilon),\phi^2(.,r,\lambda-i\varepsilon))}$$

$$(5.2.87) \qquad \theta_{22}(\lambda-i\varepsilon) = \frac{i\, c_\infty^2(z)}{W(u^\infty(.,r,\lambda-i\varepsilon),\phi^2(.,r,\lambda-i\varepsilon))} .$$

On voit immédiatement que, pour tout $\lambda \in (c_0r,c_2r) \cup (-c_2r,-c_0r)$,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} (\theta_{12}(\lambda+i\varepsilon)-\theta_{12}(\lambda-i\varepsilon)) = 0$$

uniformément pour $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$.

Par suite, on a

$$(5.2.88) \qquad \rho_{11}([\lambda_1,\lambda_2]) = \rho_{12}([\lambda_1,\lambda_2]) = \rho_{21}([\lambda_1,\lambda_2]) = 0 .$$

De plus, on a

$$(5.2.89)\qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} -\theta_{22}(\lambda-i\varepsilon) = 2i\,\frac{\lambda\,\xi_0(\lambda)}{\mu_0}\,e^{\xi_2'(\lambda)h}\left(\frac{1}{\left(\frac{\xi_2'(\lambda)}{\mu_2}\cos\xi_1(\lambda)h-\frac{\xi_1(\lambda)}{\mu_1}\sin\xi_1(\lambda)h\right)^2+\frac{\xi_0^2(\lambda)}{\mu_0^2}\left(\cos\xi_1(\lambda)h+\frac{\xi_2'(\lambda)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda)}\sin\xi_1(\lambda)h\right)^2}\right)$$

uniformément pour $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$.

Par suite, on a

$$(5.2.90)\qquad \rho_{22}([\lambda_1,\lambda_2]) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} a_0(\varepsilon,\mu,r;\lambda)^2 d\lambda$$

où on a posé

$$(5.2.91)\qquad a_0(\varepsilon,\mu,r;\lambda) = \left(\frac{\lambda\,\xi_0(\lambda)}{\pi\,\mu_0}\right)^{1/2} e^{\xi_2'(\lambda)h/2}\left(\frac{1}{\left(\frac{\xi_2'(\lambda)}{\mu_2}\cos\xi_1(\lambda)h-\frac{\xi_1(\lambda)}{\mu_1}\sin\xi_1(\lambda)h\right)^2+\frac{\xi_0^2(\lambda)}{\mu_0^2}\left(\cos\xi_1(\lambda)h+\frac{\xi_2'(\lambda)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda)}\sin\xi_1(\lambda)h\right)^2}\right)^{1/2}.$$

Remarquons que $a_0(\varepsilon,\mu,r;\lambda) > 0$ pour $\lambda \in (c_0r,c_2r) \cup (-c_2r,-c_0r)$ car $\lambda\,\xi_0(\lambda) > 0$; en effet, si $\lambda \in (c_0r,c_2r)$, on a $\xi_0(\lambda) > 0$ et si $\lambda < 0$, on a bien $\xi_0(\lambda) < 0$ d'après la définition 4.11. Le théorème 5.4 et la matrice spectrale

$$(5.2.92)\qquad \rho(.) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(.) \end{pmatrix}$$

définie par (5.2.88) et (5.2.90), définissent une représentation spectrale complète de l'opérateur

(5.2.93) $\quad A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_0r,c_2r)) \oplus A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_2r,-c_0r))$

à l'aide de la fonction propre généralisée $u^{\infty}(.,r,\lambda)$. Pour cela, il convient d'introduire la fonction propre généralisée et normalisée suivante :

(5.2.94) $\quad \psi_0(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda) = a_0(\varepsilon,\mu,r;\lambda)u^{\infty}(y,r,\lambda)$.

Compte tenu du théorème 5.4, nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 5.6

Supposons que $0 < c_1 < c_0 < c_2$. *Les limites*

(5.2.95) $$\hat{f}^0_{r+}(\lambda) = L^2([c_0r,c_2r]) - \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}(f(.),\chi_{[a,b]}(.)\psi_0(\varepsilon,\mu,r;\cdot,\lambda))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}$$

(5.2.96) $$\hat{f}^0_{r-}(\lambda) = L^2([-c_2r,-c_0r]) - \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}(f(.),\chi_{[a,b]}(.)\psi_0(\varepsilon,\mu,r;.,\lambda))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}$$

existent pour tout $f(.) \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$.

Les applications $U^0_{r+}(\varepsilon,\mu,r)$ *et* $U^0_{r-}(\varepsilon,\mu,r)$ *définies par*

(5.2.97) $$U^0_{r+}(\varepsilon,\mu,r)f = \hat{f}^0_{r+}$$

(5.2.98) $$U^0_{r-}(\varepsilon,\mu,r)f = \hat{f}^0_{r-}$$

sont des opérateurs partiellement isométriques subjectifs avec pour projecteurs initiaux, respectivement $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_0r,c_2r))$ *et* $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_2r,-c_0r))$, *i.e.*

(5.2.99) $$U^0_{r+}(\varepsilon,\mu,r)U^{0*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r) = U^0_{r-}(\varepsilon,\mu,r)U^{0*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = \mathbb{1}$$

(5.2.100) $U^{0*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)U^{0}_{r+}(\varepsilon,\mu,r) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_0r,c_2r))$

(5.2.101) $U^{0*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)U^{0}_{r-}(\varepsilon,\mu, r) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_2r,-c_0r))$

Les isomorphismes réciproques $U^{0*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)$ *et* $U^{0*}_{r-}(\varepsilon,\mu, r)$ *sont donnés par*

(5.2.102) $$(U^{0*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\hat{f}^{0}_{r+})(y) = H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) - \lim_{\delta\downarrow 0} \int_{c_0r+\delta}^{c_2r-\delta} \psi_0(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda)\hat{f}^{0}_{r+}(\lambda)d\lambda$$

(5.2.103) $$(U^{0*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\hat{f}^{0}_{r-})(y) = H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) - \lim_{\delta\downarrow 0} \int_{-c_2r+\delta}^{-c_0r-\delta} \psi_0(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda)\hat{f}^{0}_{r-}(\lambda)d\lambda \ .$$

L'opérateur $U^{0}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)$ (resp. $U^{0}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)$) *définit une représentation spectrale de* $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ *sur* $L^2([c_0r,c_2r])$ (resp. $L^2([-c_2r,-c_0r])$) *et relativement à* $\Pi(\varepsilon,\mu,r,(c_0r,c_2r))A(\varepsilon,\mu,r)$, (resp. $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-c_2r,-c_0r))A(\varepsilon,\mu,r)$), *i.e. pour toute fonction borélienne* $\psi(\lambda)$ *dont le support est contenu dans* $[c_0r,c_2r]$ (resp. $[-c_2r,-c_0r]$) *on a*

(5.2.103a) $$U^{0}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)D(\psi(A(\varepsilon,\mu,r))) = \{\hat{f}^{0}_{r+}(.);\hat{f}^{0}_{r+}(.) \ \textit{et} \ \psi(.)\hat{f}^{0}_{r+}(.) \ \textit{sont dans} \ L^2([c_0r,c_2r])\}$$

(respectivement

(5.2.103b) $$U^{0}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)D(\psi(A(\varepsilon,\mu,r)) = \{\hat{f}^{0}_{r-}(.);\hat{f}^{0}_{r-}(.) \ \textit{et} \ \psi(.)\hat{f}^{0}_{r-}(.) \ \textit{sont dans} \ L^2([-c_2r,-c_0r])\}$$*)*

et

(5.2.103c) $$U^{0}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\psi(A(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda) = \psi(\lambda) \ \hat{f}^{0}_{r+}(\lambda)$$

(respectivement

(5.2.103d) $U^0_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\psi(A(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda) = \psi(\lambda)\hat{f}^0_{r-}(\lambda)$)

5.2.3. Cas de $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_2r,\infty))\mathcal{H}(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) \oplus \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2r))\mathcal{H}(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$

Comme dans le cas précédent, il est nécessaire d'utiliser des solutions de l'équation $A(\varepsilon,\mu,r)\phi = z\,\phi$ analytiques dans un voisinage complexe de (c_0r,c_2r) et de $(-c_2r,-c_0r)$. Pour cela, on utilise les déterminations $z \to \xi_j(z)$, $j=0,1,2$ données dans la définition 4.11. Chacune de ces fonctions est analytique dans l'ouvert :

(5.2.104) $\theta' = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z \in (c_2r,\infty) \cup (-\infty,-c_2r)\}$.

Nous allons introduire maintenant quatre solutions de l'équation $A(\varepsilon,\mu,r)\phi = z\,\phi$, analytiques sur θ'.

La première (resp. la seconde), notée $\phi^1(y,r,z)$ (resp. $\phi^2(y,r,z)$), coïncide avec $u^{-\infty}(y,r,z)$ pour tout $z \in \theta'$ tel que $\mathrm{Im}\, z > 0$ (resp. $\mathrm{Im}\, z < 0$). De même, la troisième (resp. la quatrième), notée $\phi^3(y,r,z)$ (resp. $\phi^4(y,r,z)$) coïncide avec $u^{\infty}(y,r,z)$ pour tout $z \in \theta'$ tel que $\mathrm{Im}\, z > 0$ (resp. $\mathrm{Im}\, z < 0$).

Il résulte de (5.2.52)-(5.2.54) et de (4.88) et (4.89) que l'on a pour tout $z \in \theta'$:

$$(5.2.105)\quad \phi_1^1(y;r,z)=\begin{cases} e^{-i\xi_0(z)y} & , y \le 0 \\[2ex] \cos \xi_1(z)y \quad - i\,\dfrac{\mu_1}{\mu_0}\,\dfrac{\xi_0(z)}{\xi_1(z)}\,\sin \xi_1(z)y & , 0 \le y \le h \\[2ex] \dfrac{1}{2}\, e^{i\xi_2(z)(y-h)}\,\dfrac{\mu_2}{\xi_2(z)}\,\Big(\cos \xi_1(z)h\,\Big(\dfrac{\xi_2(z)}{\mu_2} - \dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\Big) & \\[2ex] \qquad + i \sin \xi_1(z)h\,\Big(\dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1} - \dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)}\,\dfrac{\xi_2(z)}{\mu_2}\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\Big)\Big) & \\[2ex] \qquad \dfrac{1}{2}\, e^{-i\xi_2(z)(y-h)}\,\dfrac{\mu_2}{\xi_2(z)}\Big(\cos \xi_1(z)h\Big(\dfrac{\xi_2(z)}{\mu_2} + \dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\Big) & \\[2ex] \qquad - i \sin \xi_1(z)h\,\Big(\dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1} + \dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)}\,\dfrac{\xi_2(z)}{\mu_2}\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\Big)\Big) & \\[2ex] & , y \ge h\,. \end{cases}$$

$$(5.2.106)\qquad \phi_2^1(y,r,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\,\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\, e^{-i\xi_0(z)y} & , \ y \le 0 \\[2ex] \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0} \cos \xi_1(z)y - i\, \dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1} \sin \xi_1(z)y\right) & , \ 0 \le y \le h \\[2ex] \dfrac{i}{z}\Big(\dfrac{1}{2}\, e^{i\xi_2(z)(y-h)} \Big(i \cos \xi_1(z)h \left(\dfrac{\xi_2(z)}{\mu_2} - \dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\right) & \\[2ex] \quad + \sin \xi_1(z)h \left(\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\, \dfrac{\xi_2(z)}{\mu_2}\, \dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)} - \dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1}\right)\Big) & \\[2ex] \quad - \dfrac{1}{2}\, e^{-i\xi_2(z)(y-h)} \Big(i \cos \xi_1(z)h\left(\dfrac{\xi_2(z)}{\mu_2} + \dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\right) & \\[2ex] \quad + \sin \xi_1(z)h\left(\dfrac{\xi_0(z)}{\mu_0}\, \dfrac{\xi_2(z)}{\mu_2}\, \dfrac{\mu_1}{\xi_1(z)} + \dfrac{\xi_1(z)}{\mu_1}\right)\Big)\Big) \ , & \\ & y \ge h\ . \end{cases}$$

$$(5.2.107)\qquad \phi_3^1(y,r,z) = \frac{r}{z}\, \frac{1}{\mu(y)}\ \phi_1^1(y,r,z) \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R} - (\{0\} \cup \{h\}).$$

Compte tenu de (4.28)-(4.30), on a donc pour tout $z \in \theta$:

$$(5.2.108)\qquad \phi_1^2(y,r,z) = \overline{\phi_1^1(y,r,\bar{z})}$$

$$(5.2.109)\qquad \phi_2^2(y,r,z) = - \overline{\phi_2^1(y,r,\bar{z})}$$

$$(5.2.110)\qquad \phi_3^2(y,r,z) = \overline{\phi_3^1(y,r,\bar{z})}\ .$$

Compte tenu de (5.2.49)-(5.2.51) et de (4.88) et (4.89), on a, pour tout $z \in \theta'$

$$(5.2.111)\quad \phi_1^3(y,r,z)=\begin{cases} e^{i\xi_2(z)h}\{\frac{1}{2}e^{-i\xi_0(z)y}(\cos\xi_1(z)h(1-\frac{\mu_0}{\xi_0(z)}\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}) \\ \quad + i\sin\xi_1(z)h\,(-\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}+\frac{\mu_0}{\xi_0(z)}\frac{\xi_1(z)}{\mu_1})) \\ \quad + \frac{1}{2}e^{i\xi_0(z)y}\,(\cos\xi_1(z)h\,(1+\frac{\mu_0}{\xi_0(z)}\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}) \\ \quad - i\sin\xi_1(z)h\,(\frac{\xi_0(z)}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}+\frac{\mu_0}{\xi_0(z)}\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}))\}, & y\le 0 \\ e^{i\xi_2(z)h}\,(\cos\xi_1(z)(y-h)+i\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}\sin\xi_1(z)(y-h), & 0\le y\le h \\ e^{i\xi_2(z)y}, & y\ge h \end{cases}$$

$$(5.2.112)\quad \phi_2^3(y,r,z)=\begin{cases} \frac{i}{z}e^{i\xi_2(z)h}\{\frac{1}{2}e^{-i\xi_0(z)y}(-i\cos\xi_1(z)h(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}-\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}) \\ \quad + \sin\xi_1(z)h\,(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}-\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\xi_1(z)})) \\ \quad + \frac{1}{2}e^{i\xi_0(z)y}(i\cos\xi_1(z)h\,(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}+\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}) \\ \quad + \sin\xi_1(z)h(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}+\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}))\}, & y\le 0 \\ -\frac{i}{z}e^{i\xi_2(z)h}(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1}\sin\xi_1(z)(y-h)-i\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\cos\xi_1(z)(y-h)), & 0\le y\le h \\ -\frac{1}{z}\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}e^{i\xi_0(z)y} & y\ge h \end{cases}$$

$$(5.2.113)\quad \phi_3^3(y,r,z) = \frac{r}{z}\,\frac{1}{\mu(y)}\,\phi_1^3(y,r,z) \quad \text{pour} \quad y \in \mathbb{R} - (\{0\}\cup\{h\}) .$$

Enfin, compte tenu de (4.28)-(4.30), on a, pour tout $z \in \theta'$:

$$(5.2.114)\quad \phi_1^4(y,r,z) = \overline{\phi_1^3(y,r,\bar{z})}$$

$$(5.2.115)\quad \phi_2^4(y,r,z) = -\,\overline{\phi_2^3(y,r,\bar{z})}$$

$$(5.2.116)\quad \phi_3^4(y,r,z) = \overline{\phi_3^3(y,r,\bar{z})} .$$

Il résulte de (5.2.105)-(5.2.110), que l'on a

$$(5.2.117)\quad W(\phi^2(.,r,z),\phi^1(.,r,z)) = \frac{2}{z}\,\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} .$$

De même, de (5.2.111)-(5.2.116), on déduit que

$$(5.2.118)\quad W(\phi^4(.,r,z),\phi^3(.,r,z)) = -\,\frac{2}{z}\,\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}.$$

Il résulte immédiatement de (5.2.117) et (5.2.118), que pour tout $z \in \theta'$, on a

$$(5.2.119)\quad W(\phi^2(.,r,z),\phi^1(.,r,z)) \neq 0$$

$$(5.2.120)\quad W(\phi^4(.,r,z),\phi^3(.,r,z)) \neq 0 .$$

Il résulte de (4.88), (4.89) et de (4.100), que l'on a

$$(5.2.121)\quad W(\phi^3(.,r,z),\phi^1(.,r,z)) =$$

$$= \frac{e^{i\xi_2(z)h}}{z}\left\{ \left(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\right)\cos \xi_1(z)h \,-\right.$$

$$\left. -\, i \left(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}\right) \sin \xi_1(z)h \right\}$$

$$(5.2.122) \quad W(\phi^2(.,r,z),\phi^2(.,r,z))$$

$$= - \frac{e^{-i\xi_0(z)h}}{z}\{(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(z)}{\mu_2})\cos \xi_1(z)h$$

$$+ i(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)})\sin \xi_1(z)h\}.$$

Il résulte de (4.100), que l'on a

$$(5.2.123) \quad W(\phi^3(.,r,z),\phi^1(.,r,z)) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \theta' \quad \text{tel que} \quad \text{Im } z > 0$$

$$(5.2.124) \quad W(\phi^4(.,r,z),\phi^2(.,r,z)) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \theta' \quad \text{tel que} \quad \text{Im } z < 0.$$

De plus, on a

$$(5.2.125) \quad W(\phi^3(.,r,z),\phi^1(.,r,z)) = g'(z) + i\, h'(z)$$

avec

$$(5.2.126) \quad z\, g'(z) = (\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(z)}{\mu_2})\cos \xi_1(z)h \cos \xi_2(z)h$$

$$+ (\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)})\sin \xi_1(z)h \sin \xi_2(z)h$$

$$(5.2.127) \quad z\, h'(z) = (\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(z)}{\mu_2}) \cos \xi_1(z)h \sin \xi_2(z)h$$

$$- (\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)})\sin \xi_1(z)h \cos \xi_2(z)h$$

pour tout $z \in \theta'$.

Il résulte de (4.90) que l'on a

(5.2.128) $\overline{g'(\bar{z})} = g'(z)$ et $\overline{h'(\bar{z})} = h'(z)$.

Par suite, pour $\lambda = z \in \mathbb{R}$, $g'(.)$ et $h'(.)$ sont des fonctions réelles. On désire montrer que $W(\phi^3(.,r,\lambda),\phi^1(.,r,\lambda)) \neq 0$ pour tout $\lambda \in (c_2 r,\infty) \cup (-\infty,-c_2 r)$.

Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in (c_2 r,\infty) \cup (-\infty,-c_2 r)$ tel que

(5.2.129) $W(\phi^3(.,r,\lambda_0),\phi^1(.,r,\lambda_0)) = g'(\lambda_0) + i\, h'(\lambda_0) = 0$.

On a donc

(5.2.130) $g'(\lambda_0) = h'(\lambda_0) = 0$.

Soit

(5.2.131) $$\left(\frac{\xi_0(\lambda_0)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(\lambda_0)}{\mu_2}\right) \cos \xi_1(\lambda_0)h \cos \xi_2(\lambda_0)h$$

$$+ \left(\frac{\xi_1(\lambda_0)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(\lambda_0)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(\lambda_0)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda_0)}\right) \sin \xi_1(\lambda_0) \sin \xi_2(\lambda_0)h = 0$$

(5.2.132) $$\left(\frac{\xi_0(\lambda_0)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(\lambda_0)}{\mu_2}\right) \cos \xi_1(\lambda_0)h \sin \xi_2(\lambda_0)h$$

$$- \left(\frac{\xi_1(\lambda_0)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(\lambda_0)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(\lambda_0)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda_0)}\right) \sin \xi_1(\lambda_0)h \cos \xi_2(\lambda_0)h = 0 .$$

En éliminant $\left(\frac{\xi_1(\lambda_0)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(\lambda_0)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(\lambda_0)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda_0)}\right)$ de (5.2.131) et (5.2.132), on trouve :

(5.2.133) $\left(\frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(\lambda_0)}{\mu_2}\right)\cos \xi_1(\lambda_0)h = 0$.

De même, en éliminant $\left(\frac{\xi_0(\lambda_0)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(\lambda_0)}{\mu_2}\right)$, on trouve

(5.2.134) $\left(\frac{\xi_1(\lambda_0)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(\lambda_0)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(\lambda_0)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda_0)}\right) \sin \xi_1(\lambda_0)h = 0$.

Or, lorsque $\lambda \in (c_2r,\infty)$, on a $\xi_j(\lambda) > 0$, $j=0,1,2$ et lorsque $\lambda \in (-\infty,-c_2r)$, on a $\xi_j(\lambda) < 0$, $j=0,1,2$. Par suite, (5.2.133) et (5.2.134) ont pour conséquence

(5.2.135) $\cos \xi_1(\lambda_0)h = \sin \xi_1(\lambda_0)h = 0$

ce qui est impossible.

Donc, à tout intervalle ouvert et borné (λ_1,λ_2) tel que $[\lambda_1,\lambda_2] \subset (c_2r,\infty) \cup (-\infty,-c_2r)$ on peut associer comme dans 5.2.2 un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que sur l'ouvert $\theta'((\lambda_1,\lambda_2))$ suivant :

(5.2.136) $\theta'((\lambda_1,\lambda_2)) = \{z \in \mathbb{C};\mathrm{Re}\ z \in (c_2r,\infty) \cup (-\infty,-c_2r)$

$\quad$ et $\mathrm{Im}\ z > -\varepsilon_0\}$.

La fonction $z \to W(\phi^3(.,r,z),\phi^1(.,r,z))$ ne s'annulle sur $\theta'((\lambda_1,\lambda_2))$. On appliquera donc le théorème 5.5 à l'ouvert $\theta'((\lambda_1,\lambda_2))$ et à la base $\{\phi^1(.,r,z),\phi^3(.,r,z)\}$.

De (4.35), on déduit immédiatement que l'on a, pour $y \leq y'$ et $\lambda \pm i\varepsilon \in \theta'((\lambda_1,\lambda_2))$:

$$(5.2.137)\qquad G_{i,j}(\varepsilon,\mu,r;y,y',\lambda+i\varepsilon) = i\frac{\phi_i^1(y,r,\lambda+i\varepsilon)\overline{\phi_j^4(y',r,\lambda-i\varepsilon)}}{W(\phi^3(.,r,\lambda+i\varepsilon),\phi^1(.,r,\lambda+i\varepsilon))}$$

$$(5.2.138)\qquad G_{i,j}(\varepsilon,\mu,r;y,y',\lambda-i\varepsilon) = i\,\frac{\phi_2^2(y,r,\lambda-i\varepsilon)\overline{\phi_j^3(y',r,\lambda+i\varepsilon)}}{W(\phi^4(.,r,\lambda+i\varepsilon),\phi^2(.,r,\lambda+i\varepsilon))}$$

De plus, on a

$$(5.2.139)\qquad \phi^4(.,r,z) = c_1^4(z)\phi^1(.,r,z) + c_3^4(z)\phi^3(.,r,z)$$

$$(5.2.140)\qquad \phi^2(.,r,z) = c_1^2(z)\phi^1(.,r,z) + c_3^2(z)\phi^3(.,r,z)$$

avec

$$(5.2.141)\qquad c_1^2(z) = \frac{W(\phi^2(.,r,z),\phi^3(.,r,z))}{W(\phi^1(.,r,z),\phi^3(.,r,z))}$$

$$(5.2.142)\qquad c_3^2(z) = \frac{W(\phi^2(.,r,z),\phi^1(.,r,z))}{W(\phi^3(.,r,z),\phi^1(.,r,z))}$$

$$(5.2.143)\qquad c_1^4(z) = \frac{W(\phi^4(.,r,z),\phi^3(.,r,z))}{W(\phi^1(.,r,z),\phi^3(.,r,z))}$$

$$(5.2.144)\qquad c_3^4(z) = \frac{W(\phi^4(.,r,z),\phi^1(.,r,z))}{W(\phi^3(.,r,z),\phi^1(.,r,z))}\,.$$

D'où l'on déduit

$$(5.2.145)\qquad \theta_{31}(\lambda+i\varepsilon) = \theta_{33}(\lambda+i\varepsilon) = 0$$

$$(5.2.146)\quad \theta_{11}(\lambda+i\varepsilon) = \frac{i\,\overline{c_1^4(\lambda-i\varepsilon)}}{W(\phi^3(.,r,\lambda+i\varepsilon),\phi^1(.,r,\lambda+i\varepsilon))}$$

$$(5.2.147)\quad \theta_{13}(\lambda+i\varepsilon) = \frac{i\,\overline{c_3^4(\lambda-i\varepsilon)}}{W(\phi^3(.,r,\lambda+i\varepsilon),\phi^1(.,r,\lambda+i\varepsilon))}$$

$$(5.2.148)\quad \theta_{11}(\lambda-i\varepsilon) = \theta_{31}(\lambda-i\varepsilon) = 0$$

$$(5.2.149)\quad \theta_{13}(\lambda-i\varepsilon) = \frac{i\,c_1^2(\lambda-i\varepsilon)}{W(\phi^4(.,r,\lambda-i\varepsilon),\phi^2(.,r,\lambda-i\varepsilon))}$$

$$(5.2.150)\quad \theta_{33}(\lambda-i\varepsilon) = \frac{i\,c_3^2(\lambda-i\varepsilon)}{W(\phi^4(.,r,\lambda-i\varepsilon),\phi^2(.,r,\lambda-i\varepsilon))}$$

Il résulte de (4.88), (4.89) et de (4.100), que l'on a

$$(5.2.151)\quad W(\phi^4(.,r,z),\phi^1(.,r,z)) =$$

$$= \frac{e^{-i\xi_2(z)h}}{z}\left\{\left(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} - \frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\right)\cos \xi_1(z)h +\right.$$

$$\left. + i\left(\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\,\frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)} - \frac{\xi_1(z)}{\mu_1}\right)\sin \xi_1(z)h \right\}$$

$$(5.2.152)\quad W(\phi^2(.,r,z),\phi^3(.,r,z)) =$$

$$= \frac{e^{i\xi_2(z)h}}{z}\left\{\left(\frac{\xi_0(z)}{\mu_0} - \frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\right)\cos \xi_1(z)h +\right.$$

$$\left. + i\left(\frac{\xi_1(z)}{\mu_1} - \frac{\xi_0(z)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(z)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(z)}\right)\sin \xi_1(z)h\right\} .$$

On montre alors facilement à partir de (5.2.121),(5.2.122), (5.2.151) et (5.2.152) que l'on a

(5.2.153) $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\theta_{13}(\lambda+i\varepsilon) - \theta_{13}(\lambda-i\varepsilon)) = 0$$

uniformément par rapport à $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$. On a donc

(5.2.154) $$\rho_{13}([\lambda_1,\lambda_2]) = \rho_{31}([\lambda_1,\lambda_2]) = 0 .$$

On montre, à partir de (5.2.118), (5.2.121) que l'on a

(5.2.155) $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \theta_{11}(\lambda+i\varepsilon) = 2i\,\lambda\,\frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2} \left\{ \frac{1}{(\frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2})^2 \cos^2\xi_1(\lambda)h + (\frac{\xi_1(\lambda)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda)})^2 \sin^2\xi_1(\lambda)h} \right\}$$

uniformément par rapport à $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$.

De même montre-t-on que

(5.2.156) $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} - \theta_{33}(\lambda-i\varepsilon) = 2i\,\lambda\,\frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0} \left\{ \frac{1}{(\frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2})^2 \cos^2\xi_1(\lambda)h + (\frac{\xi_1(\lambda)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda)})^2 \sin^2\xi_1(\lambda)h} \right\}$$

Remarquons que pour tout $\lambda \in (c_2r,\infty) \cup (-c_2r,-\infty)$, on a $\lambda\,\xi_0(\lambda) > 0$ et $\lambda\,\xi_2(\lambda) > 0$. Par suite, on pose pour tout $\lambda \in (c_2r,\infty) \cup (-\infty,-c_2r)$:

(5.2.157) $$a^+(\varepsilon,\mu,r;\lambda) = (\frac{\lambda\,\xi_2(\lambda)}{\pi\,\mu_2})^{1/2} \left\{ \frac{1}{[(\frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2})^2 \cos^2\xi_1(\lambda)h + (\frac{\xi_1(\lambda)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0}\,\frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda)})^2 \sin^2\xi_1(\lambda)h]^{1/2}} \right\}$$

$$(5.2.158) \quad a^{-}(\varepsilon,\mu,r;\lambda) = \left(\frac{\lambda\, \xi_0(\lambda)}{\pi\, \mu_0}\right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0} + \frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2}\right)^2 \cos^2 \xi_1(\lambda) h + \left(\frac{\xi_1(\lambda)}{\mu_1} + \frac{\xi_0(\lambda)}{\mu_0}\frac{\xi_2(\lambda)}{\mu_2}\frac{\mu_1}{\xi_1(\lambda)}\right)^2 \sin^2 \xi_i(\lambda) h\right]^{1/2}} \right\}$$

On a donc

$$(5.2.159) \quad \rho_{11}([\lambda_1,\lambda_2]) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} a^{+}(\varepsilon,\mu,r;\lambda)d\lambda$$

$$(5.2.160) \quad \rho_{33}([\lambda_1,\lambda_2]) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} a^{-}(\varepsilon,\mu,r;\lambda)d\lambda.$$

Posons maintenant pour tout $\lambda \in (c_2 r,\infty) \cup (-\infty,-c_2 r)$:

$$(5.2.161) \quad \psi^{+}(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda) = a^{+}(\varepsilon,\mu,r;\lambda)\phi^{1}(y,r;\lambda)$$

$$(5.2.162) \quad \psi^{-}(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda) = a^{-}(\varepsilon,\mu,r;\lambda)\phi^{3}(y,r;\lambda)$$

Le théorème 5.4 et la matrice spectrale

$$(5.2.163) \quad \rho(.) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(.) & 0 \\ 0 & \rho_{33}(.) \end{pmatrix}$$

définie par (5.2.159) et (5.2.160) définissent une représentation spectrale de l'opérateur

$$(5.2.164) \quad A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_2 r,\infty)) \oplus A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2 r))$$

à l'aide des fonctions propres généralisées et normalisées $\psi^{\pm}(\varepsilon,\mu,r;\lambda)$. Ces résultats sont exprimés dans le théorème suivant :

Théorème 5.7

Supposons que $0 < c_1 < c_0 \le c_2$.

Les limites

$$(5.2.164)\quad \hat{f}^{\pm}_{r+}(\lambda) = L^2([c_2 r,\infty))-\lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to-\infty}}(f(.),\chi_{[a,b]}(.)\psi^{\pm}(\varepsilon,\mu,r;.,\lambda))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}$$

$$(5.2.165)\quad \hat{f}^{\pm}_{r-}(\lambda) = L^2((-\infty,-c_2 r])-\lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to-\infty}}(f(.),\chi_{[a,b]}(.)\psi^{\pm}(\varepsilon,\mu,r;.,\lambda))_{H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})}$$

existent pour tout $f \in H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$.

Les applications

$$(5.2.166)\quad \begin{aligned} &U_{r+}(\varepsilon,\mu,r): H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) \to L^2([c_2 r,\infty)) \oplus L^2([c_2 r,\infty)) \\ &U_{r+}(\varepsilon,\mu,r)f = (\hat{f}^{+}_{r+} , \hat{f}^{-}_{r+}) \end{aligned}$$

$$(5.2.167)\quad \begin{aligned} &U_{r-}(\varepsilon,\mu,r): H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) \to L^2((-\infty,-c_2 r]) \oplus L^2(-\infty,-c_2 r]) \\ &U_{r-}(\ , \ ,r)f = (\hat{f}^{+}_{r-}, \ \hat{f}^{-}_{r-}) \end{aligned}$$

sont des opérateurs partiellement isométriques subjectifs avec pour projecteurs initiaux, respectivement $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_2 r,\infty))$ *et* $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2 r))$, *i.e.*

$$(5.2.168)\quad U^*_{r+}(\varepsilon,\mu,r)U_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_2 r,\infty))$$

$$(5.2.169)\quad U^*_{r-}(\varepsilon,\mu,r)U_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2 r))$$

$$(5.2.170)\quad U_{r+}(\varepsilon,\mu,r)U^*_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = U_{r-}(\varepsilon,\mu,r)U^*_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = \mathbb{1}$$

Les applications réciproques sont données par

$$(5.2.171)\quad (U^*_{r+}(\varepsilon,\mu,r)(\hat{f}^{+}_{r+},\hat{f}^{-}_{r+}))(y) = H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) - \lim_{\substack{M\to\infty\\ \delta\to\infty}} \int_{c_2 r+\delta}^{M} (\psi^{+}(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda)\hat{f}^{+}_{r+}(\lambda) + \psi^{-}(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda)\hat{f}^{-}_{r+}(\lambda))d\lambda$$

$$(5.2.172)\quad (U^{*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)(\hat{f}^{+}_{r-},\hat{f}^{-}_{r-}))(y) = H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R}) - \lim_{\substack{M\to\infty\\ \delta\to 0}} \int_{-M}^{-c_2 r-\delta} (\psi^{+}(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda)\hat{f}^{+}_{r-}(\lambda) + \psi^{-}(\varepsilon,\mu,r;y,\lambda)\hat{f}^{-}_{r-}(\lambda))d\lambda$$

De plus $U_{r+}(\varepsilon,\mu,r)$ (resp. $U_{r-}(\varepsilon,\mu,r)$) *définit une représentation spectrale de* $H(\varepsilon,\mu;\mathbb{R})$ *sur* $L^2([c_2r,\infty)) \oplus L^2([c_2r,\infty))$ (resp. $L^2((-\infty,-c_2r]) \oplus L^2((-\infty,-c_2r])$) *relativement à* $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_2r,\infty))A(\varepsilon,\mu,r)$ (resp. $\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2r))A(\varepsilon,\mu,r)$). *Ainsi pour toute fonction borélienne* $\psi(\lambda)$ *sur* (c_2r,∞) (resp. $(-\infty,-c_2r)$), *on a*

$$(5.2.173)\quad U_{r+}(\varepsilon,\mu,r)D(\psi(A(\varepsilon,\mu,r)) = \{\hat{f}_{+}(.) = (\hat{f}^{+}_{+}(.),\hat{f}^{-}_{+}(.));\hat{f}_{+}(.) \text{ et } \psi(.)\hat{f}_{+}(.) \in L^2([c_2r,\infty)) \oplus L^2([c_2r,\infty))\}$$

et

$$(5.2.174)\quad (U_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\psi(A(\varepsilon,\mu,r))f)(\lambda) = \psi(\lambda)\hat{f}_{+}(\lambda) = (\psi(\lambda)\hat{f}^{+}_{+}(\lambda),\psi(\lambda)\hat{f}^{-}_{+}(\lambda)$$

(respectivement

$$(5.2.175)\quad U_{r+}(\varepsilon,\mu,r)D(\psi(A(\varepsilon,\mu,r))) = \{\hat{f}_{-}(.) = (\hat{f}^{+}_{-}(.),\hat{f}^{-}_{-}(.));\hat{f}_{-}(.) \quad \psi(.)\hat{f}_{-}(.) \in L^2((-\infty,-c_2r]) \oplus L^2((-\infty,-c_2r])\}$$

et

$$(5.2.176)\quad (U_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\psi(A(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda) = \psi(\lambda)\hat{f}_{-}(\lambda) = (\psi(\lambda)\hat{f}^{+}_{-}(\lambda),\psi(\lambda)\hat{f}^{-}_{-}(\lambda))\ ).$$

Définissons les projecteurs suivants :

$$(5.2.177)\quad Q^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\ :\ L^2([c_2r,\infty)) \oplus L^2([c_2r,\infty)) \to L^2([c_2r,\infty))$$

par

$$(5.2.178)\quad Q^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)(\hat{f}^{+}_{+}(.),\hat{f}^{-}_{+}(.)) = \hat{f}^{\pm}_{+}(.)$$

$$(5.2.179)\quad Q^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\ :\ L^2((-\infty,-c_2r]) \oplus L^2((-\infty,-c_2r]) \to L^2((-\infty,-c_2r])$$

par

$$(5.2.180)\quad Q^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)(\hat{f}^{+}_{-}(.),\hat{f}^{-}_{+}(.)) = \hat{f}^{\pm}_{-}(.)\ .$$

Posons

$$(5.2.181)\quad \Phi^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r) = Q^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)U_{r+}(\varepsilon,\mu,r)$$

$$(5.2.182)\quad \Phi^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = Q^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)U_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\ .$$

Le théorème 5.7 implique le corollaire suivant :

Corollaire 5.8

Supposons que $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$.
Pour tout $f \in H(\varepsilon,\mu,r)$, *on a*

$$(5.2.183)\quad (\Phi^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda) = \hat{f}^{\pm}_{r+}(\lambda)\ ,$$

$$(5.2.184)\quad (\Phi^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda) = \hat{f}^{\pm}_{r-}(\lambda)\ .$$

De plus

$$(5.2.185)\quad (U_{r+}(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda) = ((\Phi^{+}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda),(\Phi^{-}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda))$$

$$(5.2.186)\quad (U_{r-}(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda) = ((\Phi^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda),(\Phi^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)f)(\lambda))$$

$$(5.2.187)\quad (U^{*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)(\hat{f}^{+}_{r+},\hat{f}^{-}_{r+}))(y) = (\Phi^{+*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\hat{f}^{+}_{r+})(y) + (\Phi^{-*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\hat{f}^{-}_{r+})(y)$$

$$(5.2.188)\quad (U^{*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)(\hat{f}^{+}_{r-},\hat{f}^{-}_{r-}))(y) = (\Phi^{+*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\hat{f}^{+}_{r-})(y) + (\Phi^{-*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\hat{f}^{-}_{r-})(y)$$

et

$$(5.2.189)\quad \Phi^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\Phi^{\pm*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r) = \mathbb{1}$$

$$(5.2.190)\quad \Phi^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\Phi^{\pm*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = \mathbb{1}\ .$$

Enfin, les projecteurs orthogonaux suivants

$$(5.2.191)\quad P^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r) = \Phi^{\pm*}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\Phi^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r).$$

$$(5.2.192)\quad P^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = \Phi^{\pm*}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)\Phi^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)$$

sont tels que

$$(5.2.193)\quad P^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r) + P^{\pm}_{r+}(\varepsilon,\mu,r) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;(c_2r,\infty))$$

$$(5.2.194)\quad P^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r) + P^{\pm}_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = \Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2r))$$

et

$$(5.2.195)\quad P^{+}_{r+}(\varepsilon,\mu,r)\ P^{-}_{r+}(\varepsilon,\mu,r) = 0$$

$$(5.2.196)\quad P^{+}_{r-}(\varepsilon,\mu,r)P^{-}_{r-}(\varepsilon,\mu,r) = 0.$$

En particulier, des théorèmes 5.7 et 5.8, on déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 5.9

Supposons que $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$.

L'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_0r] \cup [c_0r,\infty))$ *est un opérateur absolument continu dont le spectre, noté* $\sigma(A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_0r] \cup [c_0r,\infty))$, *est égal à*

$$\sigma(A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_0r] \cup [c_0r,\infty)) = (-\infty,-c_0r] \cup [c_0r,\infty) \tag{5.2.197}$$

Chacun des deux opérateurs $A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;[c_0r,c_2r])$ *et* $A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;[-c_2r,-c_0r])$ *a un spectre simple, respectivement égal à* $[c_0r,c_2r]$ *et à* $[-c_2r,-c_0r]$.

Chacun des deux opérateurs $A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;[c_2r,\infty))$ *et* $A(\varepsilon,\mu,r)\Pi(\varepsilon,\mu,r;(-\infty,-c_2r])$ *a un spectre de multiplicité 2 reespectivement égal à* $[c_2r,\infty)$ *et à* $(-\infty,-c_2r]$.

En CONCLUSION, lorsque $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$, le spectre de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$, est complètement décrit par la proposition 3.8, le théorème 3.9 et le théorème 5.9.

De plus, compte tenu de (5.2.1) et de (5.2.2), les théorèmes 5.1, 5.3, 5.6, 5.7, le corollaire 5.8 décrivent un développement en fonctions propres de l'opérateur $A(\varepsilon,\mu,r)$, $r > 0$, lorsque $0 < c_1 < c_0 \leq c_2$.

6. DEVELOPPEMENT EN FONCTIONS PROPRES GENERALISEES DE L'OPERATEUR DE MAXWELL M RESTREINT AU SOUS ESPACE $\Pi(\mathbb{R}-\{0\})$

Le but de ce chapitre est de montrer que les modes transverse-électriques (T.E.) et transverse-magnétiques (T.M.) habituellement considérés par les ingénieurs et physiciens, forment un système complet de fonctions propres généralisées de la partie continue de l'opérateur M.

Cette analyse se fait à partir de celles des opérateurs A, $\hat{A}$, A_p $(p \in \mathbb{R}^2)$, $A(\varepsilon,\mu,|p|)$ et $A(\mu,\varepsilon,|p|)$. Pour ce faire, la formule (2.59), les propositions 2.6 et 2.8 sont fondamentales ainsi que tous les résultats obtenus dans le chapitre 5. Le principe des démonstrations est suffisamment bien développé dans ([5], [6], [7]) pour qu'il soit nécessaire de les rappeler ici. On se reportera aux articles précités pour les détails.

De plus, on se contentera de donner ici un énoncé le plus bref possible. Comme précédemment, on se reportera aux références précitées pour en déduire les conséquences possibles, notamment pour la représentation des solutions de l'équation $i\frac{\partial}{\partial t}u - Mu = 0$. A partir de cette représentation, il est possible d'étudier le comportement asymptotique des solutions lorsque t devient grand.

En fait, la formule fondamentale qui récapitule les résultats du chapitre 2 et dont dépend ceux de ce chapitre est la suivante :

$$(6.1) \qquad M = P^{-1} F^{-1}\Big(\int^{\oplus}_{\mathbb{R}^2} U(p)\big(A(\varepsilon,\mu,|p|) \oplus -A(\mu,\varepsilon,|p|)\big)U(p)^{-1}dp\Big) F P$$

On a alors

$$(6.2) \qquad M = P^{-1} F^{-1}\Big(\int^{\oplus}_{\mathbb{R}^2} U(p)A(\varepsilon,\mu,|p|)U(p)^{-1}dp\Big) F P$$
$$\oplus\, P^{-1} F^{-1} \Big(\int^{\oplus}_{\mathbb{R}^2} U(p)(-A(\mu,\varepsilon,|p|))U(p)^{-1}dp\Big) F P .$$

Il importe de remarquer tout d'abord que $\{0\}$ est valeur propre de M car $\{0\}$ est valeur propre des opérateurs $A(\varepsilon,\mu,|p|)$ et $A(\mu,\varepsilon,|p|)$ pour tout p.

Notons $\Pi(.)$ la mesure spectrale de l'opérateur M. Il résulte de (6.1) que l'on a

(6.3) $$\Pi(\{0\}) = P^{-1} F^{-1}\Big(\int^{\oplus}_{\mathbb{R}^2} U(p)(\Pi(\varepsilon,\mu,|p|,\{0\}) \oplus \Pi(\mu,\varepsilon,|p|,\{0\}))\, U(p)^{-1} dp\Big) F\, P$$

et

(6.4) $$M\Pi(\mathbb{R}-\{0\}) = P^{-1} F^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} U(p)(A(\varepsilon,\mu,|p|)\Pi(\varepsilon,\mu,|p|,\mathbb{R}-\{0\}))\, U(p)^{-1}\Big) F\, P$$

$$\oplus\ \Pi^{-1} F^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} U(p)(-A(\mu,\varepsilon,|p|)\Pi(\mu,\varepsilon,|p|,\mathbb{R}-\{0\}))U(p)^{-1}dp\Big) F\, P$$

Une représentation spectrales des opérateurs $A(\varepsilon,\mu,|p|)\Pi(\varepsilon,\mu,|p|,\mathbb{R}-\{0\})$ et $A(\mu,\varepsilon,|p|)\Pi(\mu,\varepsilon,|p|,\mathbb{R}-\{0\})$ à l'aide de fonctions propres généralisées a été construite au chapitre 5. En utilisant ces résultats, on en déduit, comme dans ([5], [6], [7]) une représentation spectrale de l'opérateur $M\Pi(\mathbb{R}-\{0\})$. Les fonctions propres utilisées pour obtenir une représentation spectrale du premier opérateur du membre de droite de (6.4) sont ce que les physiciens appelent les modes transverse électriques encore notés T.E. Les fonctions propres utilisées pour obtenir une représentation spectrale du second opérateur du membre de droite de (6.4) sont ce que les physiciens appelent les modes transverse magnétiques, encore notés T.M.

Nous allons décrire maintenant les résultats après avoir défini les fonctions propres généralisées.

Définition 6.1

On notera ${}^{te}\omega_k(|p|)$ $(k \geq 1)$ *les solutions de la relation de dispersion (3.63) et* ${}^{te}p_k$ *les seuils donnés par (3.73). On prolonge la définition de* ${}^{te}\omega_k$ *en posant*

$$(6.5) \qquad {}^{te}\omega_k(|p|) = - {}^{te}\omega_{|k|}(|p|)$$

lorsque k *est un entier relatif tel que* $k \leq -1$.

Définition 6.2

Pour tout $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$ *et pour tout* $p \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $|p| > {}^{te}p_{|k|}$, *on pose*

$$(6.6) \qquad {}^{te}\psi_k(x,y,p) = P^{-1}U(p) \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} e^{ipx} u_1^{(k-1)}(\varepsilon,\mu,|p|,y) \\ \frac{1}{2\pi} e^{ipx} u_2^{(k-1)}(\varepsilon,\mu,|p|,y) \\ \frac{1}{2\pi} e^{ipx} u_3^{(k-1)}(\varepsilon,\mu,|p|,y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lorsque $k \geq 1$ et

$$(6.7) \qquad {}^{te}\psi_k(x,y,p) = P^{-1}U(p) \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} e^{ipx} v_1^{(|k|-1)}(\varepsilon,\mu,|p|,y) \\ \frac{1}{2\pi} e^{ipx} v_2^{(|k|-1)}(\varepsilon,\mu,|p|,y) \\ \frac{1}{2\pi} e^{ipx} v_3^{(|k|-1)}(\varepsilon,\mu,|p|,y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lorsque $k \leq -1$.

En se reportant au chapitre 5, on pose les définitions suivantes :

Définition 6.3 (mode T.E.)

Pour tout $p \neq 0$ *et pour tout* $\lambda \in (-c_2|p|,-c_0|p|) \cup (c_0|p|,c_2|p|)$, *posons*

$$(6.8) \qquad {}^{te}\psi_0(x,y,p,\lambda) = P^{-1}U(p) \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_1^0(\varepsilon,\mu,|p|,y,\lambda) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_2^0(\varepsilon,\mu,|p|,y,\lambda) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_3^0(\varepsilon,\mu,|p|,y,\lambda) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Définition 6.4 (mode T.E.)

Pour tout $p \neq 0$ *et pour tout* $\lambda \in (-\infty,-c_2|p|) \cup (c_2|p|,\infty)$, *posons*

$$(6.9) \qquad {}^{te}\psi_\pm(x,y,p,\lambda) = P^{-1}U(p) \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_1^\pm(\varepsilon,\mu,|p|,y,\lambda) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_2^\pm(\varepsilon,\mu,|p|,y,\lambda) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_3^\pm(\varepsilon,\mu,|p|,y,\lambda) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On notera ${}^{tm}\omega_k(|p|)$ $(k \geq 1)$, les solutions de la relation de dispersion suivante :

$$(6.10)\qquad \operatorname{tg} \xi_1 h = \frac{\frac{\xi_1}{\varepsilon_1}\frac{\xi_0'}{\varepsilon_0} + \frac{\xi_1}{\varepsilon_1}\frac{\xi_2'}{\varepsilon_2}}{(\frac{\xi_1}{\varepsilon_1})^2 - \frac{\xi_0^1}{\varepsilon_0}\frac{\xi_2^1}{\varepsilon_2}}$$

déduite de la relation (6.3) en permutant ε et μ, et on posera

$$(6.10)\qquad {}^{tm}p_k = \frac{1}{h((\frac{c_0}{c_1})^2-1)^{1/2}}\ ((k-1)\pi\ \ \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ \frac{(1-(c_0/c_2)^2)^{1/2}}{((c_0/c_1)^2-1)^{1/2}})$$

$k = 1,2,\ldots$

${}^{tm}p_k$ est le seuil correspondant à la valeur propre ${}^{tm}\omega_k(|p|)$.
Le vecteur propre de l'opérateur $A(\mu,\varepsilon,|p|)$ pour la valeur propre ${}^{tm}\omega_k(|p|)$ sera noté $u^{(k-1)}(\mu,\varepsilon,|p|,y)$ en analogie avec (5.2.23). Son expression se déduit de (5.2.23) en permutant ε et μ et en substituant ${}^{tm}\omega_k(|p|)$ à la place de ${}^{te}\omega_k(|p|)$. De même, le vecteur propre de l'opérateur $A(\mu,\varepsilon,|p|)$ pour la valeur propre $-{}^{tm}\omega_k(|p|)$ sera noté $v^{(k-1)}(\mu,\varepsilon,|p|,y)$ en analogie avec (5.2.25). Son expression se déduit de (5.2.25) en permutant ε et μ et en substituant ${}^{tm}\omega_k(|p|)$ à la place de ${}^{te}\omega_p(|p|)$. Comme pour ${}^{te}\omega_k$, on prolonge la définition de ${}^{tm}\omega_k$ en posant

$$(6.11)\qquad {}^{tm}\omega_k(|p|) = -{}^{tm}\omega_{|k|}(|p|)$$

lorsque k est un entier relatif tel que $k \leq -1$.

Définition 6.5 (mode T.M.)

Pour tout $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$ *et pour tout* $p \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $|p| > {}^{tm}p_{|k|}$ *on pose*

$$(6.12) \qquad {}^{tm}\psi_k(x,y,p) = P^{-1}U(p)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx} u_1^{(k-1)}(\mu,\varepsilon,|p|,y) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx} u_2^{(k-1)}(\mu,\varepsilon,|p|,y) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx} u_3^{(k-1)}(\mu,\varepsilon,|p|,y) \end{bmatrix}$$

lorsque $k \geq 1$ et

$$(6.13) \qquad {}^{tm}\psi_k(x,y,p) = P^{-1}U(p)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx} v_1^{(|k|-1)}(\mu,\varepsilon,|p|,y) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx} v_2^{(|k|-1)}(\mu,\varepsilon,|p|,y) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx} v_3^{(|k|-1)}(\mu,\varepsilon,|p|,y) \end{bmatrix}$$

lorsque $k \leq 1$.

Définition 6.6 (mode T.M.)

Pour tout $p \neq 0$ *et pour tout* $\lambda \in (-c_2|p|,-c_0|p|) \cup (c_0|p|,c_2|p|)$, *posons*

$$(6.14) \qquad {}^{tm}\psi_0(x,y,p,\lambda) = P^{-1}U(p)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_1^0(\mu,\varepsilon,|p|,y,\lambda) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_2^0(\mu,\varepsilon,|p|,y,\lambda) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_3^0(\mu,\varepsilon,|p|,y,\lambda) \end{bmatrix}$$

Définition 6.7 (mode T.M.)

Pour tout $p \neq 0$ *et pour tout* $\lambda \in (-\infty,-c_2|p|) \cup (c_2|p|,\infty)$, *posons*

$$(6.15) \qquad {}^{tm}\psi_\pm(x,y,p,\lambda) = P^{-1}U(p)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_1^\pm(\mu,\varepsilon,|p|,y,\lambda) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_2^\pm(\mu,\varepsilon,|p|,y,\lambda) \\ \frac{1}{2\pi}\, e^{ipx}\psi_3^\pm(\mu,\varepsilon,|p|,y,\lambda) \end{bmatrix}$$

Le théorème fondamental de cet article affirme que les fonctions $({}^{te}\psi_k,\ {}^{tm}\psi_k\ (k \in \mathbb{Z}-\{0\}),\ {}^{te}\psi_0,\ {}^{tm}\psi_0,\ {}^{te}\psi_\pm,\ {}^{tm}\psi_\pm)$ forment un système complet de fonctions propres généralisées de M.

Définitions 6.8

Posons

$$(6.16)\qquad {}^{te}\Omega_k = \{p \in \mathbb{R}^2 \ ;\ |p| > {}^{te}p_{|k|}\}$$

pour $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$

$$(6.17)\qquad {}^{tm}\Omega_k = \{p \in \mathbb{R}^2 \ ;\ |p| > {}^{tm}p_{|k|}\}$$

$$(6.18)\qquad \Omega = \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ \lambda > c_2|p|\} \cup \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ \lambda < -c_2|p|\}$$

$$(6.19)\qquad \Omega_0 = \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ c_0|p| < \lambda < c_2|p|\} \cup \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ -c_2|p|<\lambda<-c_0|p|$$

Soit $C(y)$ la matrice

$$(6.20)\qquad C(y) = \begin{pmatrix} \varepsilon(y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(y) \end{pmatrix}$$

Les théorèmes suivants constituent les résultats fondamentaux de cet article. On se rappellera la définition 2.2 de l'espace de Hilbert K. On notera $<.,.>$ le produit scalaire habituel dans $\mathbb{C}^6$:

$$(6.21)\qquad <u,v> = \sum_{i=1}^{6} u_i \bar{v}_i$$

si $u = (u_i)_{1\le i\le 6}$ et $v = (v_i)_{1\le i\le 6}$ sont deux éléments de $\mathbb{C}^6$.
On rapelle que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}-\{0\}$.

Théorème 6.1

Soit $f \in K$. *Les limites suivantes existent :*

$$(6.22)\qquad {}^{te}\tilde{f}_\pm(p,\lambda) = L^2(\Omega) - \lim_{N\to\infty} \int_{|x|+|y|\le N} <C(y)f(x,y), {}^{te}\psi_\pm(x,y,p,\lambda)>dxdy$$

$$(6.23)\qquad {}^{tm}\tilde{f}_\pm(p,\lambda) = L^2(\Omega) - \lim_{N\to\infty} \int_{|x|+|y|\le N} <C(y)f(x,y), {}^{tm}\psi_\pm(x,y,p,\lambda)>dxdy$$

(6.24) $\quad {}^{te}\tilde{f}_0(p,\lambda) = L^2(\Omega_0) - \lim\limits_{N\to\infty} \int_{|x|+|y|\le N} <C(y)f(x,y),{}^{te}\psi_0(x,y,p,\lambda)>dxdy$

(6.25) $\quad {}^{tm}\tilde{f}_0(p,\lambda) = L^2(\Omega_0^+) - \lim\limits_{N\to\infty} \int_{|x|+|y|\le N} <C(y)f(x,y),{}^{tm}\psi_0(x,y,p,\lambda)>dxdy$

(6.26) $\quad {}^{te}\tilde{f}_k(p,\lambda) = L^2({}^{te}\Omega_k) - \lim\limits_{N\to\infty} \int_{|x|+|y|\le N} <C(y)f(x,y),{}^{te}\psi_k(x,y,p)>dxdy$

(6.27) $\quad {}^{tm}\tilde{f}_k(p,\lambda) = L^2({}^{tm}\Omega_k) - \lim\limits_{N\to\infty} \int_{|x|+|y|\le N} <C(y)f(x,y),{}^{tm}\psi_k(x,y,p)>dxdy$

pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

Remarque 6.7

Posons

(6.28) $\quad \Omega^+ = \{(p,\lambda) \in \Omega; c_2|p| < \lambda\}$

(6.29) $\quad \Omega^- = \{(p,\lambda) \in \Omega; \lambda < -c_2|p|\}$

on peut recomposer ${}^{te}\tilde{f}_\pm$ en deux éléments orthogonaux ${}^{te}\tilde{f}_\pm^+$ et ${}^{te}\tilde{f}_\pm^-$, tels que

(6.30) $\quad {}^{te}\tilde{f}_\pm = {}^{te}\tilde{f}_\pm^+ + {}^{te}\tilde{f}_\pm^-$

(6.31) $\quad {}^{te}\tilde{f}_\pm^+(p,\lambda) = L^2(\Omega^+) - \lim\limits_{N\to\infty} \int_{|x|+|y|\le N} <C(y)f(x,y),{}^{te}\psi_\pm(x,y,p,\lambda)>dxdy$

(6.32) $\quad {}^{te}\tilde{f}_\pm^-(p,\lambda) = L^2(\Omega^-) - \lim\limits_{N\to\infty} \int_{|x|+|y|\le N} <C(y)f(x,y),{}^{te}\psi_\pm(x,y,p,\lambda)>dxdy$.

Nous ne ferons pas intervenir ce type de décomposition dans les énoncés qui suivent afin de ne pas les alourdir.

Définition 6.9

On pose pour tout $f \in K$

(6.33) $\quad {}^{te}\Phi_{\pm} f = {}^{te}\tilde{f}_{\pm} \quad , \quad {}^{tm}\Phi_{\pm} f = {}^{tm}\tilde{f}_{\pm}$

(6.34) $\quad {}^{te}\Phi_{0} f = {}^{te}\tilde{f}_{0} \quad , \quad {}^{tm}\Phi_{0} f = {}^{tm}\tilde{f}_{0}$

(6.35) $\quad {}^{te}\Phi_{k} f = {}^{te}\tilde{f}_{k} \quad , \quad {}^{tm}\Phi_{k} f = {}^{tm}\tilde{f}_{k} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}^*.$

Définition 6.10

Posons, pour $N > 0$ *et pour* $\delta > 0$

(6.36) $\quad {}^{te}\Omega_k^N = \{p \in {}^{te}\Omega_k \ , \ |p| \leq N\}$

(6.37) $\quad {}^{tm}\Omega_k^N = \{p \in {}^{tm}\Omega_k \ ; \ |p| \leq N\}$

(6.38) $\quad \Omega_\delta^N = \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ c_2|p|+\delta<\lambda<N\} \cup \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ -N<\lambda<-c_2|p|-\delta\}$

(6.39) $\quad \Omega_{0,\delta}^N = \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^3 ; c_0|p|+\delta<\lambda<c_2|p|<N\}$

$$\cup \ \{(p,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ -N<-c_2|p|<\lambda<-c_0|p|-\delta\}.$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 6.2

Chacun des opérateurs ${}^{\bullet}\Phi^{\bullet}_{\bullet}$ *de la définition 6.8 est un opérateur partiellement isométrique subjectif, i.e. tel que*

(6.40) $\quad {}^{\bullet}\Phi^{\bullet}_{\bullet}({}^{\bullet}\Phi^{\bullet}_{\bullet})^* = I_d$

et l'on a

$$(6.41)\qquad [({}^{te}\Phi_{\pm})^{*}\,{}^{te}\tilde{f}_{\pm}](x,y) = K\text{-}\lim_{\substack{N\to\infty\\ \delta\to 0+}} \int_{\Omega_{\delta}^{N}} {}^{te}\psi_{\pm}(x,y,p,\lambda)\,{}^{te}\tilde{f}_{\pm}(p,\lambda)\,dp\,d\lambda$$

$$(6.42)\qquad [({}^{tm}\Phi_{\pm})^{*}\,{}^{tm}\tilde{f}_{\pm}](x,y) = K\text{-}\lim_{\substack{N\to\infty\\ \delta\to 0+}} \int_{\Omega_{\delta}^{N}} {}^{tm}\psi_{\pm}(x,y,p,\lambda)\,{}^{tm}\tilde{f}_{\pm}(p,\lambda)\,dp\,d\lambda$$

$$(6.43)\qquad [({}^{te}\Phi_{0})^{*}\,{}^{te}\tilde{f}_{0}](x,y) = K\text{-}\lim_{\substack{N\to\infty\\ \delta\to 0+}} \int_{\Omega_{0,\delta}^{N}} {}^{te}\psi_{0}(x,y,p,\lambda)\,{}^{te}\tilde{f}_{0}(p,\lambda)\,dp\,d\lambda$$

$$(6.44)\qquad [({}^{tm}\Phi_{0})^{*}\,{}^{tm}\tilde{f}_{0}](x,y) = K\text{-}\lim_{\substack{N\to\infty\\ \delta\to 0+}} \int_{\Omega_{0,\delta}^{N}} {}^{tm}\psi_{0}(x,y,p,\lambda)\,{}^{tm}\tilde{f}_{0}(p,\lambda)\,dp\,d\lambda$$

$$(6.45)\qquad [({}^{te}\Phi_{k})^{*}\,{}^{te}\tilde{f}_{k}](x,y) = K\text{-}\lim_{N\to\infty} \int_{{}^{te}\Omega_{k}^{N}} {}^{te}\psi_{k}(x,y,p)\,{}^{te}\tilde{f}_{k}(p)\,dp$$

pour $k \in \mathbb{Z}^{*}$

$$(6.46)\qquad [({}^{tm}\Phi_{k})^{*}\,{}^{tm}\tilde{f}_{k}](x,y) = K\text{-}\lim_{N\to\infty} \int_{{}^{te}\Omega_{k}^{N}} {}^{tm}\psi_{k}(x,y,p)\,{}^{tm}\tilde{f}_{k}(p)\,dp$$

$k \in \mathbb{Z}^{*}$.

Théorème 6.3

L'application Φ *définie pour tout* $f \in K$ *par*

$$(6.47)\qquad \Phi f = ({}^{te}\Phi_{+}f, {}^{te}\Phi_{-}f, {}^{tm}\Phi_{+}f, {}^{tm}\Phi_{-}f, {}^{te}\Phi_{0}f, {}^{tm}\Phi_{0}f, ({}^{te}\Phi_{k}f)_{k\in Z^{*}}, ({}^{tm}\Phi_{k}f)_{k\in\mathbb{Z}^{*}})$$

est un opérateur unitaire de $\Pi(\mathbb{R}-\{0\})K$ *sur*

$$L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega_0) \oplus L^2(\Omega_0) \oplus \Big(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^{*}} L^2({}^{te}\Omega_k)\Big)$$

$$\oplus \Big(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}^{*}} L^2({}^{tm}\Omega_k)\Big)\,.$$

Ainsi tout $f \in \Pi(\mathbb{R}-\{0\})K$ *se décompose en une somme*

(6.48) $$f(x,y) = {}^{te}f_+(x,y) + {}^{te}f_-(x,y) + {}^{tm}f_+(x,y) + {}^{tm}f_-(x,y) + $$
$$+ {}^{te}f_0(x,y) + {}^{tm}f_0(x,y) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} {}^{te}f_k(x,y) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} {}^{tm}f_k(x,y)$$

convergeant dans K*, avec*

(6.49) $${}^{te}f_+^+ = ({}^{te}\Phi_+^+)^* \, {}^{te}\Phi_+^+ \, f \ldots \text{ etc. } \ldots$$

Chaque projecteur $({}^{\cdot}\Phi_{\cdot}^{\cdot})^{*\,\cdot}\Phi_{\cdot}^{\cdot}$ *réduit l'opérateur* M *et on a une décomposition de* $M\Pi(\mathbb{R}-\{0\})$ *en somme directe des opérateurs réduits analogue à (6.48).*

Enfin, le dernier théorème donne une représentation spectrale de l'opérateur $M\Pi(\mathbb{R}-\{0\})$.

Théorème 6.4

L'application Φ *définie par (6.47) est une représentation spectrale de l'opérateur* $M\Pi(\mathbb{R}-\{0\})$ *en ce sens que* $f \in D(M\Pi(\mathbb{R}-\{0\}))$ *si et seulement si*

(6.50) $$\int_\Omega \lambda^2 \, |{}^{te}\tilde{f}_+(p,\lambda)|^2 dp d\lambda + \int_\Omega \lambda^2 \, |{}^{te}\tilde{f}_-(p,\lambda)|^2 dp d\lambda +$$
$$\int_\Omega \lambda^2 \, |{}^{tm}\tilde{f}_+(p,\lambda)|^2 dp d\lambda + \int_\Omega \lambda^2 \, |{}^{tm}\tilde{f}_-(p,\lambda)|^2 dp d\lambda +$$
$$\int_{\Omega_0} \lambda^2 \, |{}^{te}\tilde{f}_0(p,\lambda)|^2 dp d\lambda + \int_{\Omega_0} \lambda^2 \, |{}^{tm}\tilde{f}_0(p,\lambda)|^2 dp d\lambda +$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \int_{\omega_k} |{}^{te}\Omega(|p|)|^2| \, |{}^{te}\tilde{f}_k(p)|^2 dp +$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \int_{\omega_k} |{}^{tm}\Omega(|p|)|^2| |{}^{tm}\tilde{f}_k(p)|^2 dp < \infty ,$$

et l'on a

(6.51) $$\Phi Mf = (\lambda\, {}^{te}\tilde{f}_{+}, \lambda\, {}^{te}\tilde{f}_{-}, (-\lambda)\, {}^{tm}\tilde{f}_{+}, (-\lambda)\, {}^{tm}\tilde{f}_{-}, \lambda\, {}^{te}\tilde{f}_{0}, (-\lambda)\, {}^{tm}\tilde{f}_{0},$$

$$({}^{te}\omega_k(|p|)\, {}^{te}\tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}, ({}^{tm}\omega_k(|p|)\, {}^{tm}\tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}) \ .$$

En particulier $M\Pi(\mathbb{R}-\{0\})$ *est un opérateur absolument continu dont*

7. CONCLUSION

Cet article démontre la complétude des modes T.E. et T.M. pour une fibre optique constituée par une couche diélectrique d'épaisseur finie.

Dans l'esprit de [7] on peut tout aussi bien traiter le cas d'une fibre optique cylindrique.

De même, au vu de [11], de [12] et de [13], on peut traiter le scattering des ondes par un défaut de surface ou par une inhomogénéité des indices des différents milieux. Il semble enfin que les principaux problèmes d'intérêt pratique sont tous liés aux problèmes d'analyse numérique et certains d'entre eux seront abordés par la suite.

REFERENCES

[1] L.B. FELSEN et N. MARCUVITZ, *Radiation and scattering of waves*, Prentice Hall, 1973.

[2] D. MARCUSE, *Theory of dielectric waveguides*, Academic Press, 1974.

[3] H.G. UNGER, *Planar optical waveguides and fibers*, Oxford Engeneering Science Series. Clarendon Press, (1977).

[4] G. SCHMIDT, Spectral ans scattering theory for Maxwell's equations in an exterior domain, Arch. Rat. Mech. Anal., 28, p. 284-322, 1968.

[5] C.H. WILCOX, Spectral analysis of the Pekeris operator, Arch. Rational Mech. Anal., 60, p. 256-300, 1976.

[6] J.C. GUILLOT et C.H. WILCOX, Spectral analysis of the Epstein operator, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 80A, p. 85-98, 1978.

[7] C.H. WILCOX, Spectral analysis of sound propagation in stratified media Rapport n° 387, Math. Dept., University of Bonn, Germany, 1980.

[8] K.O. FRIEDRICHS, Spectral theory of operators in Hilbert space, Courant Institute of Mathematical Sciences, N.Y.U., 1961.

[9] E.A. CODDINGTON et N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, Mac Graw Hill (1955).

[10] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, *Linear operators. Part II. Spectral Theory*, N.Y., Interscience Publishers, (1963).

[11] Y. DERMENJIAN et J.C. GUILLOT, Théorie spectrale de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié perturbé. Fascicule n° 44, Département de Mathématiques, Université de Paris-Nord, mai 1983.

[12] Y. DERMENJIAN et J.C. GUILLOT, Le problème extérieur pour l'équation des ondes dans un milieu stratifié perturbé, fascicule n°49 , Département de Mathématiques, Université de Paris-Nord, 1983.

[13] R. WEDER, Spectral and scattering theory in perturbed stratified fluids, Communicacions Tecnicas IIMAS, n° 356, avril 1984.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique